Optik

Formel-Kapitel 1 Abschnitt 1

16 Strahlenoptik

Kantonsschule Solothurn
Reto Basler
Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

16 Strahlenoptik 1
16.1 Einleitung 3
16.2 Die Lichtgeschwindigkeit und der Brechungsindex 3
16.3 Das Fermatsche Prinzip 4
16.3.1 Die optische Weglänge L 5
16.4 Die Reflexion 6
16.4.1 Abbildung am ebenen Spiegel 7
16.4.2 Abbildung an sphärischen Spiegeln 8
16.5 Lichtbrechung 12
16.5.1 Strahlengang durch ein Prisma 13
16.5.2 Strahlengang durch eine planparallele Platte 14
16.5.3 Totalreflexion 15
16.5.4 Dispersion 16
16.6 Die Fokussierung von Licht 17
16.7 Linsen 18
16.7.1 Die dünne Linse 18
16.7.2 Abbildung an dünnen Linsen 19
16.7.3 Linsenkombinationen 22
16.7.4 Die Linsenmachergleichung 24
16.8 Optische Geräte 25
16.8.1 Das Auge 25
16.8.2 Die Lupe 25
16.8.3 Das Fernrohr 25

16.1 Einleitung

Auf die Frage: „Was sehen wir?“, lautet die simple Antwort: „Licht!“ Die Lehre vom Licht wird in der Physik auch einfach Optik genannt. Dieses Teilgebiet gibt eine Vorstellung davon, was Licht eigentlich ist (darauf wird in Kapitel 15 näher eingegangen), wie sich Licht ausbreitet und wie es mit Materie wechselwirkt.
Der Laserstrahl eines Laserpointers scheint eine Gerade zu sein. Punktförmige Lichtquellen bewirken unterschiedlich lange Schatten. Das sind nur zwei Beispiele dafür, dass wir auch in unserem Alltag davon ausgehen, dass sich das Licht geradlinig ausbreitet; wir orientieren uns sogar aufgrund dieses Erfahrungswerts in der Welt.
Unsere Wahrnehmung zeigt uns also, dass sich Licht in homogenen Medien geradlinig ausbreitet. In diesem Zusammenhang spricht man oft von Lichtstrahlen. Ein Lichtstrahl kann zwar nicht experimentell realisiert werden, jedoch können mit der Modellvorstellung eines sehr schmalen Lichtbündels optische Abbildungen in der Strahlenoptik hinreichend genau beschrieben werden.
Physikalisch sind diese Annahmen im Fermatschen Prinzip enthalten, welches im Abschnitt 16.3 betrachtet werden wird.

16.2 Die Lichtgeschwindigkeit und der Brechungsindex

Bereits Galileo Galilei versuchte 1638 die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Dabei wollte er die Laufzeit bestimmen, die das Licht von einer Bergkuppe zur nächsten und wieder zurück benötigt. Dazu stellten sich Galilei und sein Assistent jeweils auf eine der beiden Bergkuppen. Galilei liess seine Laterne kurz aufleuchten. Der Assistent sollte in dem Moment, wo er das Licht wahrnahm, ebenfalls seine Laterne kurz aufleuchten lassen. Galilei mass nun die Zeitspanne, die zwischen dem Aufleuchten seiner Laterne und seiner Beobachtung des Lichts des Assistenten auftrat. Aufgrund der extrem hohen Geschwindigkeit des Lichts war dieser experimentelle Ansatz natürlich zum Scheitern verurteilt. Im Jahre 1728 versuchte sich James Bradley am Problem, indem er die Aberration des Lichts von Sternen mass. Es folgten 1848 Hippolite Fizzeau, der erstmals ein terrestrisches Experiment gebrauchte und 1850 schliesslich Léon Foucault, der Fizzeau’s Variante verbesserte. Und schliesslich ist da auch noch das Experiment von Michelson aus dem Jahre 1881. Im Rahmen der Behandlung der speziellen Relativitätstheorie werden wir diese Methoden und Experimente nochmals aufgreifen.
Seit 1983 wird der Meter als diejenige Strecke definiert, welche das Licht im 299‘792‘458-ten Bruchteil einer Sekunde im Vakuum zurücklegt. Somit beträgt die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum exakt $299'792'458\frac{m}{s}$.

In Materie hingegen verändert sich die Lichtgeschwindigkeit. Man definiert mit dem Quotienten aus Geschwindigkeit im Medium c_{Medium} zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_{Vakuum}

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}} \tag{1}$$

den sogenannten Brechungsindex n, auch *optische Dichte* genannt. Da sich nichts schneller bewegt als das Licht im Vakuum, ist dieser stets grösser oder gleich eins.
Vergleicht man zwei Medien miteinander, so nennt man das Medium mit dem grösseren Brechungsindex als *optisch dichter*, dasjenige mit dem kleineren Brechungsindex als *optisch dünner*. In Tabelle 1 finden Sie eine Auswahl verschiedener Brechungsindices[1].

Tabelle 1 Verschiedene Brechzahlen im Vergleich.

Material	Brechzahl n bei 589nm	Material	Brechzahl n bei 589nm
Vakuum	1	Quarzglas	1.46
Luft	1,000292	Glas	1.45 – 2.14
Wasser	1.33	Bleikristall	bis 1.93
Ethanol	1.3614	Zirkon	1.92
Eis	1.31	Diamant	2.42

Aus den Zahlen in Tabelle 1 geht z.B. hervor, dass das Licht in Diamant "nur" noch mit einer Geschwindigkeit von rund $c_{\text{Diamant}} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n} = 123'881'181 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ unterwegs ist.

16.3 Das Fermatsche Prinzip

Der französische Mathematiker und Jurist Pierre de Fermat ist der Urheber des gleichnamigen Prinzips, das vereinfacht

Licht nimmt zwischen zwei Punkten immer den zeitlich kürzesten Weg.

lautet.

[1] Eine grössere Übersicht ist unter http://refractiveindex.info zu finden.

16.3.1 Die optische Weglänge L

Gehen wir nun zunächst der Frage nach, unter welchen Bedingungen das Licht in unterschiedlichen Stoffen für einen beliebigen Weg die gleiche Zeitspanne benötigt. In Abbildung 1 ist der Weg eines Lichtstrahls vom Punkt P zum Punkt Q dargestellt. Am Punkt R wechselt das Ausbreitungsmedium und somit die Brechzahl. Wegen der speziellen Fragestellung muss $\Delta t_1 = \Delta t_2$ gelten. Die Zeitspanne, welche das Licht in den Medien verbringt, berechnet sich zu

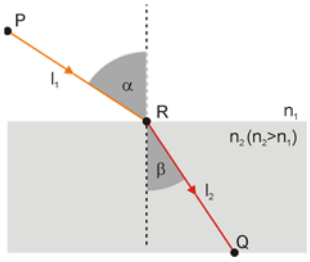


Abbildung 1: Zur Erklärung des Fermatschen Prinzips am Beispiel eines Lichtweges durch zwei verschiedene Materialien.

$$\Delta t_i = \frac{l_i}{c_i} = \frac{l_i}{\frac{c_0}{n_i}} = \frac{l_i \cdot n_i}{c_0} \qquad (2)$$

Damit folgt für die Gleichheit der Zeitspannen

$$\frac{l_1 \cdot n_1}{c_0} = \frac{l_2 \cdot n_2}{c_0}, \qquad (3)$$

respektive

$$l_1 \cdot n_1 = l_2 \cdot n_2 \qquad (4)$$

Das Produkt

$$L = l \cdot n \qquad (5)$$

wird als *optische Weglänge* bezeichnet. Es gilt somit, *dass gleiche optische Weglängen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden*.
Der optische Weg entspricht der Summe der einzelnen optischen Wege eines Lichtstrahls in verschiedenen Medien:

$$L = \sum l_i \cdot n_i \qquad (6)$$

Eine genauere Formulierung des Fermatschen Prinzips lautet damit

Licht breitet sich immer entlang derjenigen Pfade aus, auf denen die Zeit, welche der Lichtstrahl zum Durchlaufen braucht, ein Extremum ist.

Mit dieser Definition soll nun gezeigt werden, dass sich ein Lichtstrahl im homogenen Medium geradlinig ausbreitet. In Abbildung 2 soll sich Licht vom Punkt P zum Punkt R bewegen. Die optische Weglänge dazu beträgt nach (6)

$$L = \sum l_i \cdot n_i = n_1 \cdot l_1 \qquad (7)$$

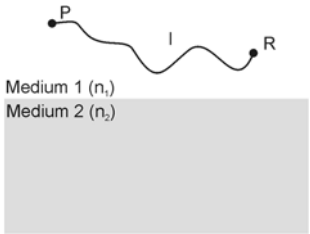


Abbildung 2: Zur geradlinigen Ausbreitung des Lichts im homogenen Medium.

Dieser Ausdruck ist genau dann extremal, wenn l extremal ist. Hier kommt als Extremum nur ein Minimum in Frage, weshalb auch l minimal sein muss! Und die kürzeste Verbindung ist in diesem Fall eine Gerade!

16.4 Die Reflexion

Trifft Licht auf die Oberfläche eines Gegenstandes, so wird ein Teil des Lichts reflektiert, ein anderer Teil wird entweder absorbiert und in thermische Energie umgewandelt oder, wenn das Material transparent ist, durchgelassen. Wird fast das gesamte Licht reflektiert, dann spricht man von einem Spiegel.

Wie wird ein Lichtstrahl am ebenen Spiegel reflektiert? In Abbildung 3 ist der Weg eines Lichtstrahls vom Punkt P über den Punkt R – wo er reflektiert wird – bis zum Punkt Q dargestellt. Der Brechungsindex bleibt über die gesamte Stecke hinweg gleich. Der Einfallswinkel α und der Ausfallswinkel β sind absichtlich nicht gleich gross dargestellt. Für die optische Weglänge folgt in diesem Fall

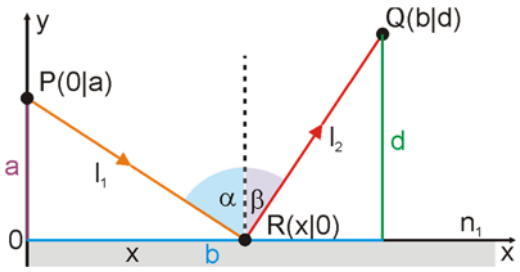


Abbildung 3: Wie ein Lichtstrahl am ebenen Spiegel reflektiert wird.

$$L(x) = l_1 \cdot n + l_2 \cdot n = n(l_1 + l_2) = n(|R-P| + |Q-R|) = n\left(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{d^2+(b-x)^2}\right) \quad (8)$$

Diese Funktion wird nach x abgeleitet und anschliessend null gesetzt, um die Extremalwerte zu finden.

$$0 = \frac{dL}{dx} = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2(b-x)(-1)}{\sqrt{d^2+(b-x)^2}}\right) \quad (9)$$

Oder vereinfacht

$$0 = n \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(b-x)}{\sqrt{d^2+(b-x)^2}}\right) \quad (10)$$

Weil ausserdem

$$\sin\alpha = \frac{x}{l_1} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad (11)$$

und

$$\sin\beta = \frac{b-x}{l_2} = \frac{b-x}{\sqrt{d^2+(b-x)^2}} \quad (12)$$

gilt, wird aus (10) nunmehr

$$0 = n \cdot (\sin\alpha - \sin\beta) \tag{13}$$

Der Brechungsindex fällt weg, wenn beide Seiten durch n dividiert werden. Da die beiden Winkel α und β im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sind und die Sinusfunktion in diesem Intervall injektiv ist, folgt aus (13) schliesslich das *Reflexionsgesetz*

$$\alpha = \beta \tag{14}$$

Bei der Reflexion ist also Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

An einer unebenen Fläche wird einfallendes Licht in alle Richtungen reflektiert. Das geschieht auch dann, wenn die Unebenheiten mikroskopisch klein sind. Man spricht dann von diffuser Reflexion im Gegensatz zur direkten Reflexion. Die beiden Möglichkeiten sind in Abbildung 4 zusammen dargestellt. Ein Objekt, welches das Licht diffus reflektiert, kann aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden. Fällt ein begrenztes Lichtbündel hingegen auf einen Spiegel, so kann dieses Licht nur beobachtet werden, wenn sich das Auge an entsprechender Position befindet.

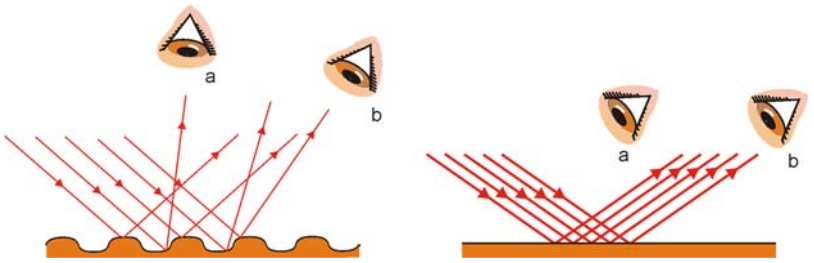


Abbildung 4: Diffuse Reflexion links und reguläre Reflexion rechts.

16.4.1 Abbildung am ebenen Spiegel

Ebene Spiegel findet man überall in unserem Alltag. Wie entsteht aber ein Bild beim ebenen Spiegel? Dazu betrachten wir die in Abbildung 5 dargestellte Situation. Vom Objekt respektive einem Punkt des Objekts gehen viele Lichtstrahlen aus – respektive werden von einer Lichtquelle kommend reflektiert. Aber nur diejenigen Lichtstrahlen, welche nach der Reflexion am ebenen Spiegel das Auge treffen, werden auch wahrgenommen. Da unser Auge aber alle Lichtstrahlen geradlinig verlängert (gestrichelte Linien in Abbildung 5), scheint das Licht des Gegenstandes von einem Ort hinter dem Spiegel zu kommen. Dabei handelt es sich bei der Abbildung um ein *virtuelles Bild*, da die Lichtstrahlen nicht

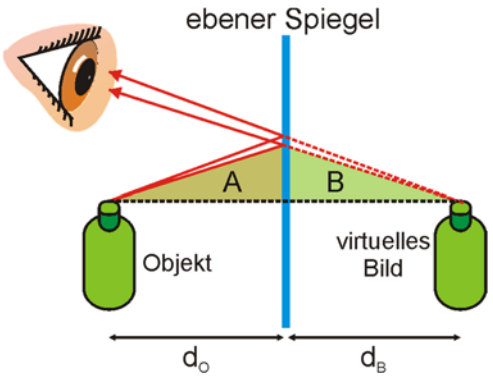


Abbildung 5: Zur Abbildung am ebenen Spiegel.

wirklich durch das Bild gehen. Ein solches Bild könnte man nicht sichtbar machen, indem man am Ort des Bildes eine Mattscheibe hinstellt; deshalb virtuell. Im Gegensatz dazu handelt es sich beim projizierten Bild z.B. eines Diaprojektors um ein *reelles Bild*. Wegen des Reflexionsgesetzes sind ausserdem die in Abbildung 5 markierten Dreiecke A und B gleich gross. Deshalb sind die *Objektweite* d_O und die *Bildweite* d_B gleich gross. Das Bild liegt also scheinbar gleich weit hinter dem Spiegel, wie das Objekt vor dem Spiegel steht. Ausserdem sind Objekt und virtuelles Bild gleich gross.

Beispiel: Wie gross muss ein ebener Spiegel mindestens sein und wie weit vom Boden entfernt aufgehängt, damit sich eine Frau von 1.70m Körpergrösse darin komplett sehen kann? Wir gehen davon aus, dass sich die Augen der Frau 10cm unterhalb des Scheitels des Spiegels befinden.

Zur Lösung betrachten wir die angefertigte Situationsskizze in Abbildung 6. Das vom Punkt A kommende Licht wird nach der Reflexion in B ins Auge G gelangen. Wegen des Reflexionsgesetzes muss die Strecke $\overline{AB}$ halb so gross sein, wie die Strecke $\overline{AG}$. Die Unterkannte des Spiegels muss somit in diesem Beispiel $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AG} = \frac{1}{2} \cdot 1.60\text{m} = 0.80\text{m}$ liegen.

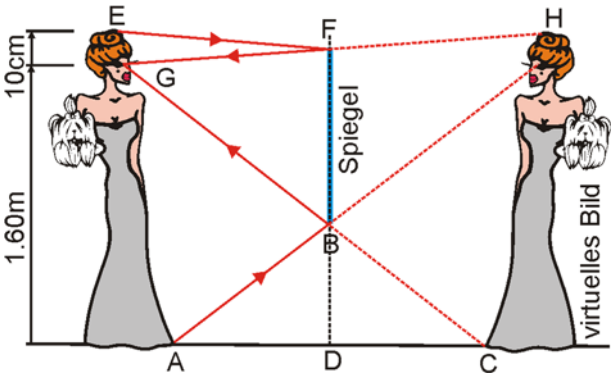


Abbildung 6: Abbildung am ebenen Spiegel. Wie gross muss dieser mindestens sein, damit man sich

Dieselbe Argumentation lässt erkennen, dass der Punkt F die Hälfte der Strecke von $\overline{EG}$ unterhalb des Punktes E liegen muss. Im vorliegenden Fall somit $\frac{1}{2}\overline{EG} = 0.05\text{m}$. Der Spiegel hat demnach eine Mindesthöhe von $\overline{BF} = 1.70\text{m} - 0.80\text{m} - 0.05\text{m} = 0.85\text{m}$.

Interessanterweise hängt das Ergebnis nicht davon ab, in welcher Entfernung vom Spiegel sich die Person befindet!

16.4.2 Abbildung an sphärischen Spiegeln

In ganz vielen Fällen ist die reflektierende Oberfläche nicht eben. Man spricht dann von gekrümmten oder *gewölbten Spiegeln*. Ist die reflektierende Seite nach aussen gewölbt, wie in Abbildung 7b), so ist die spiegelnde Oberfläche *konvex*; ist die Spiegelfläche nach innen gewölbt, wie in Abbildung 7a), so ist der Spiegel *konkav*. Ist die Spiegeloberfläche

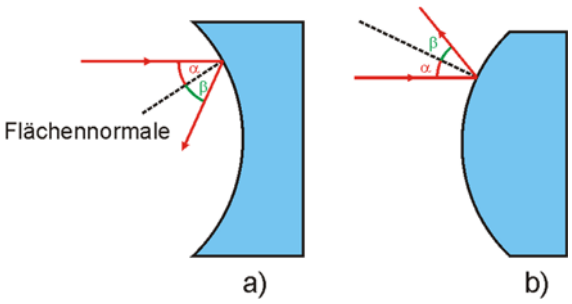


Abbildung 7: Konkavspiegel a) und Konvexspiegel b).

Teil eines Kugelsegments, so handelt es sich zusätzlich um einen *sphärischen Spiegel*. Auch bei der Reflexion an sphärischen Spiegeln wird jeder einfallende Lichtstrahl entsprechend dem Reflexionsgesetz reflektiert.
Als nächstes wollen wir uns ansehen, was mit den Lichtstrahlen am Konkavspiegel passiert, welche von einem unendlich weit entfernten Objekt (wie z.B. der Sonne) auf den Spiegel fallen. Wie in Abbildung 9 zu erkennen ist, verlaufen die reflektierten Strahlen nicht alle durch einen Punkt auf der Hauptachse. Als Folge davon wird das Objekt unscharf abgebildet. Dieser Effekt ist umso grösser, je kleiner der Krümmungsradius ist. Man nennt diesen Abbildungsfehler *sphärische Aberration*.

Allerdings kann man zeigen, dass Strahlen, welche nahe der Hauptachse verlaufen – deren Einfallswinkel also klein sind, in sehr guter Näherung durch einen Punkt verlaufen. Dies wird bei Spiegeln mit grosser Krümmung eher der Fall sein. Alternativ gilt das für Strahlen, welche nahe Hauptachse einfallen. Das Bild eines weit entfernten Objekts wird dann in einen Punkt abgebildet, den sogenannten Brennpunkt F. Wie in Abbildung 8 gezeigt ist, schneidet ein achsparallel einfallender Lichtstrahl die Hauptachse im Punkt F. für die Brennweite des Hohlspiegels gilt dann

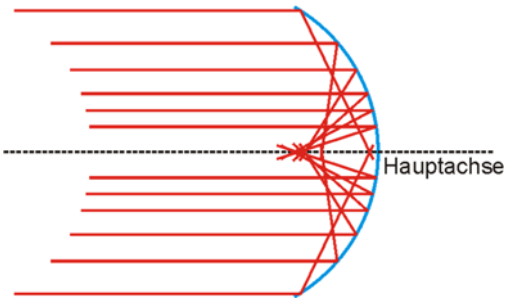


Abbildung 9: Parallel einfallende Strahlen verlaufen beim sphärischen Spiegel nicht durch einen fokussierenden Punkt.

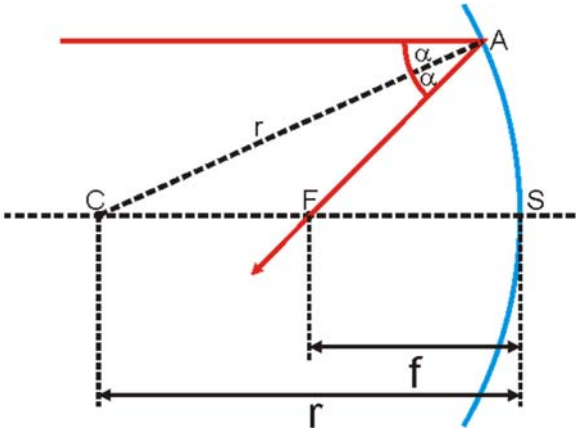


Abbildung 8: Beim sphärischen Spiegel ist die Brennweite halb so gross wie der Krümmungsradius.

$$f = r - \overline{CF} \qquad (15)$$

Für die Strecke $\overline{CF}$ gilt ausserdem

$$\overline{CF} = \frac{r}{2\cos\alpha} \qquad (16)$$

Beide Resultate miteinander kombiniert gibt

$$f = r\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right) \qquad (17)$$

Für kleine Winkel α ist $\cos\alpha \approx 1$ und für die Brennweite ergibt sich in diesem Fall die Näherung

$$f = \frac{r}{2} \qquad (18)$$

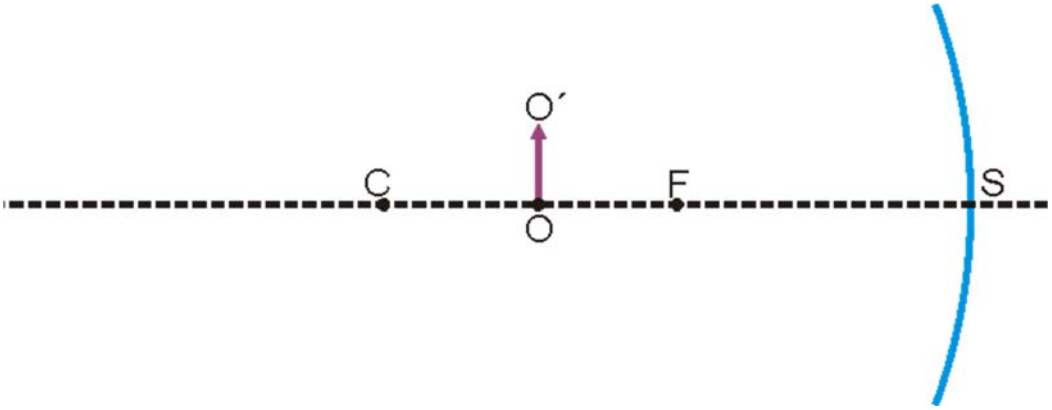
Wir fassen mal zusammen:

Das Bild eines unendlich weit entfernten Objekts liegt beim sphärischen Hohlspiegel im Brennpunkt und die Brennweite ist halb so gross wie der Krümmungsradius.

Wo aber liegt das Bild, wenn das Objekt nicht unendlich weit entfernt ist? Dazu verwendet man mit Vorteil folgende zwei ausgezeichnete Lichtstrahlen:

1. *Ein vom Objekt achsparallel einfallender Lichtstrahl wird immer durch den Brennpunkt reflektiert.*
2. *Ein vom Objekt kommender, durch den Brennpunkt verlaufender Lichtstrahl wird achsparallel reflektiert.*

Aufgabe: Konstruieren Sie das Bild des im Punkt O stehenden Pfeils! Handelt es sich um ein virtuelles oder reelles Bild?



16.4.2.1 Die Spiegelgleichung und die Lateralvergrösserung

Wie hängen bei der sphärischen Abbildung die Bildweite d_B, die Objektweite d_O und die Brennweite f des Spiegels zusammen?

Die *Lateralvergrösserung m* eines Spiegels ist definiert als das Verhältnis der Höhe h_B des Bildes zur Höhe h_O des Objekts. Es gilt ausserdem

$$m = \frac{h_B}{h_O} = -\frac{d_B}{d_O} \tag{19}$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite von (19) wurde aus Konventionsgründen hinzugefügt. Mit dieser Konvention werden die Lage und die Orientierung der Bilder korrekt angegeben:

- Die Bildhöhe h_B ist positiv, wenn das Bild relativ zum Objekt aufrecht steht. Sie ist negativ, wenn das Bild relativ zum Objekt invertiert ist. Dabei wird die Objekthöhe h_O immer positiv gesetzt.
- Wenn das Bild, das Objekt oder der Brennpunkt auf der reflektierenden Seite des Spiegels liegen, erhält die entsprechende Weite ein positives Vorzeichen.

Die bisherigen Erkenntnisse können problemlos auch auf konvexe Spiegel übertragen werden. Auch hierbei soll stillschweigend davon ausgegangen werden, dass der Krümmungsradius gross ist, respektive dass die betrachteten paraxialen Strahlen nahe der Hauptachse verlaufen.

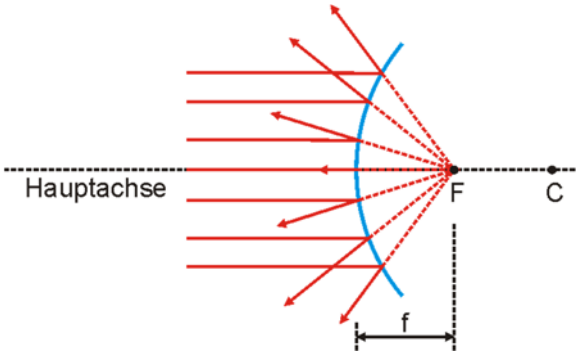
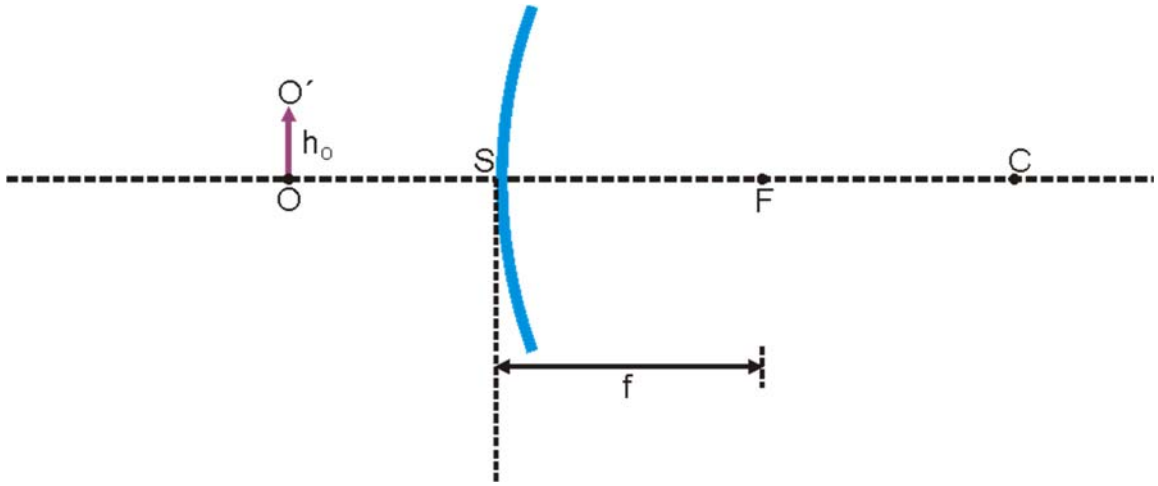


Abbildung 10: Strahlenverlauf am Konvexspiegel.

Wie in Abbildung 10 gezeigt, laufen die einfallenden Lichtstrahlen nach der Spiegelung auseinander. Verlängert man die reflektierten Strahlen jedoch zur rechten Seite hin, so scheinen sie alle ihren Ursprung in einem gemeinsamen Punkt, dem Brennpunkt zu haben.

Aufgabe: Konstruieren Sie das Bild des im Punkt O stehenden Pfeils! Handelt es sich um ein virtuelles oder reelles Bild?



16.5 Lichtbrechung

Im nächsten Schritt wird die Frage geklärt, was passiert, wenn ein Lichtstrahl auf ein transparentes Medium trifft – also ins Material eindringen kann. In Abbildung 11 ist die Situation dargestellt. Ein Lichtstrahl trifft, vom Punkt P im Medium mit der Brechzahl n_1 her kommend, im Punkt R auf die Phasengrenze zum Medium mit der Brechzahl n_2. Dabei soll $n_2 > n_1$ sein. Er dringt ein und trifft schliesslich auf den Punkt Q.

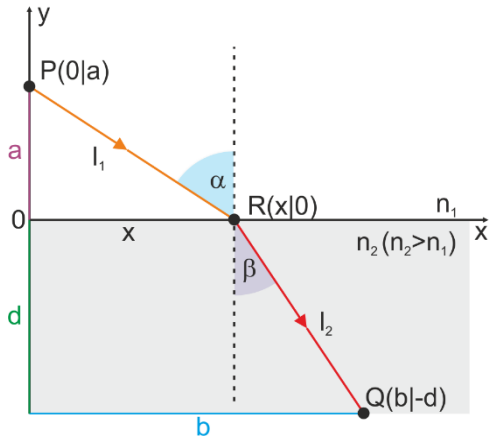


Abbildung 11: Zur Herleitung des Brechungsgesetzes.

Nun rufen wir uns das Fermatsche Prinzip (6) in Erinnerung. Da aufgrund verschiedener Brechungsindizes die Laufzeiten in den beiden Medien 1 und 2 verschieden sind, betrachten wird die benötigte Zeit:

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \frac{|R-P|}{c_1} + \frac{|Q-R|}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{d^2+(b-x)^2}}{c_2} \qquad (20)$$

Zur Ermittlung der Extremalwerte muss diese Funktion abgeleitet werden. Man erhält

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{c_2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2(b-x)(-1)}{\sqrt{d^2+(b-x)^2}} \qquad (21)$$

Kürzen und etwas Farbe:

$$0 = \frac{1}{c_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{c_2}\cdot\frac{(b-x)}{\sqrt{d^2+(b-x)^2}} \qquad (22)$$

Nun betrachten wir wieder die Abbildung. Es ist zu erkennen, dass

$$\sin\alpha = \frac{x}{l_1} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{b-x}{l_2} = \frac{b-x}{\sqrt{d^2 + (b-x)^2}} \tag{23}$$

gilt. Das wird nun in (22) eingesetzt, was zu

$$0 = \frac{1}{c_1} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{c_2} \cdot \sin\beta \tag{24}$$

führt. Umstellen und wir bekommen

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \tag{25}$$

respektive

$$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta \tag{26}$$

Formel (26) ist als das *Snelliussche Brechungsgesetz* bekannt, benannt nach dem holländischen Astronom und Mathematiker Willebrord van Roijen Snell (1580-1626), der interessanterweise aber nicht der Entdecker dieses Zusammenhangs war. Bereits um 1000 nach Christus kannten einige Gelehrte das Gesetz.

Was aber liefert uns Formel (26)? Da wir $n_2 > n_1$ vorausgesetzt haben, muss auch $\sin\alpha > \sin\beta$ gelten und da $0° \le \alpha \le 90°$ ist, folgt $\alpha > \beta$. Der Lichtstrahl ändert also beim Übergang von einem ins andere Medium seine Ausbreitungsrichtung. Für den vorliegenden Fall gilt:

Beim Übergang vom dünneren ins optisch dichtere Medium wird ein Lichtstrahl immer zum Lot hin gebrochen und umgekehrt.

In Abbildung 12 sind zur Vollständigkeit halber die gebräuchlichsten Bezeichnungen in der Strahlenoptik zusammengefasst.

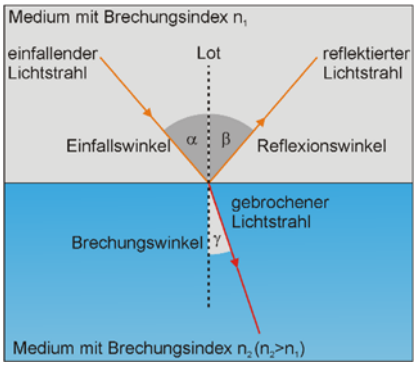


Abbildung 12: Bezeichnungen in der Strahlenoptik.

16.5.1 Strahlengang durch ein Prisma

Beim Durchgang durch ein Prisma wird der einfallende (hier monochromatische) Lichtstrahl zweimal gebrochen: einmal beim Eintritt und einmal beim Austritt aus dem Prisma, wie in Abbildung 13. Der Winkel zwischen den brechenden Kanten ist mit γ bezeichnet. Der Winkel δ ist der gesamte Ablenkungswinkel, den der Lichtstrahl beim

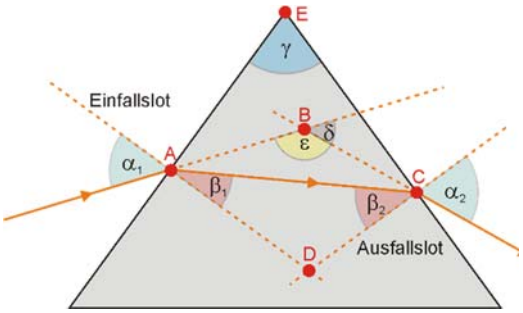


Abbildung 13: Strahlenverlauf am Prisma.

Prismendurchgang erfährt. Für diesen Winkel gilt

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma \tag{27}$$

Man kann sich leicht überlegen, dass der Ablenkungswinkel minimal wird, falls der Strahlengang symmetrisch, also $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ ist. Dann wird (27) vereinfacht zu

$$\delta_{min} = 2 \cdot \alpha - \gamma \tag{28}$$

Aus (28) folgt aber auch $\alpha = \frac{\delta_{min} + \gamma}{2}$. Da ausserdem allgemein beim Prisma $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ gilt, wird daraus beim symmetrischen Strahlengang $\gamma = 2 \cdot \beta$ mit $\beta = \beta_1 + \beta_2$, respektive $\beta = \frac{\gamma}{2}$. Das Verknüpfen wir mit dem Brechungsgesetz (26) und erhalten

$$n_1 \cdot \sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right) = n_2 \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right). \tag{29}$$

Nach der optischen Dichte n_2 aufgelöst gibt das dann

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot \sin\left(\frac{\delta_{min} + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{30}$$

Technisch gesehen lässt sich der minimale Ablenkungswinkel δ_{min} sehr gut ermitteln. Daraus kann man dann die Brechzahl des verwendeten Materials bestimmen. Die Geräte, mit welchen man auf diese Art die optische Dichte bestimmt, heissen Goniometer-Spektrometer.

16.5.2 Strahlengang durch eine planparallele Platte

Ein weiteres optisches Bauelement ist die planparallele Platte. Der Strahlengang verläuft, wie in Abbildung 14 dargestellt. Leicht ist zu erkennen, dass aus Symmetriegründen $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ gelten muss. Der Lichtstrahl wird beim Durchgang durch eine planparallele Platte in Abhängigkeit der Dicke d lediglich um eine gewisse Strecke ε parallel verschoben. Die Herleitung für diese Verschiebung in Abhängigkeit von der Dicke der Platte soll an dieser Stelle

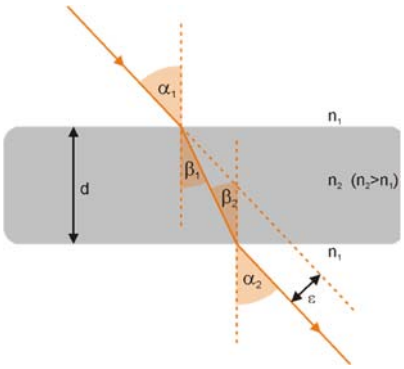


Abbildung 14: Der Strahlengang an der planparallelen Platte.

übersprungen werden. Stattdessen freuen wir uns an der Arbeit, welche bereits von jemand anderem erledigt wurde:

$$\varepsilon = d \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\alpha}} \right) \tag{31}$$

Der Parallelversatz wird in der Medizin im Keratometer zur Bestimmung der Krümmung der Hornhaut verwendet. Dabei werden zwei Marken, deren Abstand bekannt ist, auf die Hornhaut projiziert und die Strecke zwischen den virtuellen Bildern vermessen. Diese kann dann in den Krümmungsradius umgerechnet werden. Erfunden wurde das Gerät von Hermann von Helmholtz im Jahre 1851.

16.5.3 Totalreflexion

Einen Spezialfall erhalten wir, wenn wir in Abbildung 11 den Lichtweg umkehren. Gemäss Merksatz wird der Lichtstrahl beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium vom Lot weggebrochen (Lichtweg a in Abbildung 15). Wird der Winkel β immer grösser, so wird der Winkel α im Extremfall 90° werden (Abbildung 15b). Der Lichtstrahl kann das optisch dichtere Medium nicht mehr verlassen. Vergrössert man den Winkel β weiter, so wird der Lichtstrahl wieder ins Medium zurückreflektiert (Abbildung 15c). Man nennt dieses Phänomen Totalreflexion. Den Winkel β, für den gerade $\alpha = 90°$ gilt, nennt man *Grenzwinkel der Totalreflexion* β_G.

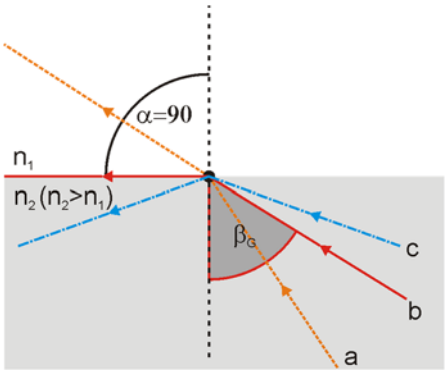


Abbildung 15: Zustandekommen der Totalreflexion.

Das Phänomen der Totalreflexion wird in der Technik u.a. in Glasfaserkabeln angewandt oder auch in Umlenkprismen. Die Funktion soll genauer betrachtet werden.

16.5.3.1 Umkehrprisma

In einigen Geräten müssen Laserstrahlen umgelenkt werden. Dies kann man mit Umlenkprismen machen, da sie verlustfreier arbeiten, als Umlenkspiegel. In Abbildung 16 sind die Strahlenverläufe für ein 90°-Umlenkprisma (a)) und ein 180° Umlenkprisma dargestellt (b)).

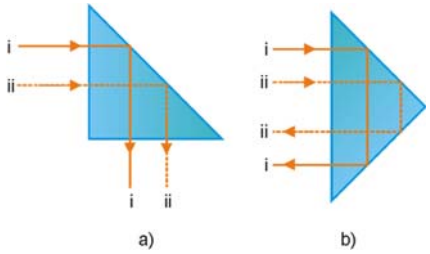


Abbildung 16: Strahlenverläufe in Umlenkprismen.

Ebenfalls häufig verwendet werde sogenannte Umkehrprismen, welche eine Umkehr des Bildes zur Folge haben. Sie finden ihren Einsatz in Ferngläsern, Mikroskopen und Spiegelreflexkameras. Es gibt unzählige Varianten von Glasschliffen, um den gewünschten Effekt zu erreichen. Das Wendeprisma gehört sicher zu den einfacheren. Es ist in Abbildung 17 dargestellt, zusammen mit dem Strahlenverlauf.

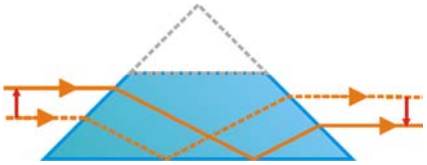


Abbildung 17: Strahlenverlauf im Wendeprisma.

16.5.4 Dispersion

Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass der Brechungsindex eines Materials (auch Brechzahl genannt) von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Dieser wellenlängenabhängigen Aufspaltung sagt man *chromatische Dispersion*. In Abbildung 18 ist der Brechungsindex von Quarzglas als Funktion der Wellenlänge in Nanometern dargestellt. Zur Berechnung des Verlaufs wurde die Cauchy-Formel

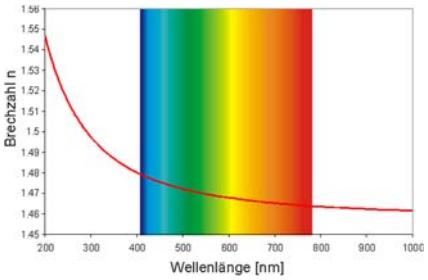


Abbildung 18: Brechungsindex von Quarzglas. Berechnet mit der Cauchy-Formel und den Parametern für Quarzglas A = 1.4580 bzw. B = 0.00354μm^2.

$$n(\lambda) \approx A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{32}$$

verwendet. Die Parameter *A* und *B* werden experimentell ermittelt. Der dargestellte Trend, nämlich eine Abnahme des Brechungsindex zu grösseren Wellenlängen hin, ist allgemein gültig.

16.5.4.1 Und wieder das Prisma

Die Dispersion wird meistens mit Hilfe eines Prismas gezeigt, wie in dargestellt ist. Damit kann gezeigt werden, dass weisses Licht aus den sogenannten Spektralfarben zusammengesetzt ist und aus allen Spektralfarben zusammen wieder weisses Licht erzeugt werden kann. Schon Isaac Newton hat damit experimentiert.

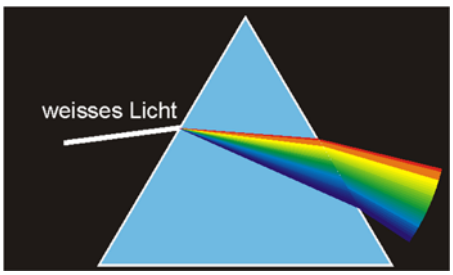


Abbildung 19: Schematische Darstellung der Dispersion am Prisma.

Eine direkte Folge der Dispersion sind Abbildungsfehler in optischen Geräten, wie z.B. Fernrohren oder Ferngläser, etc. Diese Fehler müssen zuweilen aufwendig korrigiert werden.

16.6 Die Fokussierung von Licht

Einzelne Lichtstrahlen verhalten sich entsprechend den Gesetzen von Reflexion und Brechung. Wie lässt es sich aber bewerkstelligen, dass alle von einem (Gegenstands-) Punkt ausgehende Strahlen wieder in einem einzigen (Bild-) Punkt zusammenlaufen (Abbildung 20)? Die Strahlenbüschel der Lichtquelle laufen ja bekanntlicherweise divergent auseinander. Könnte man diese Strahlen mit Hilfe eines Gerätes wieder auf einen Punkt fokussieren, so hätte man ein Abbild der leuchtenden Quelle oder des Gegenstandes.

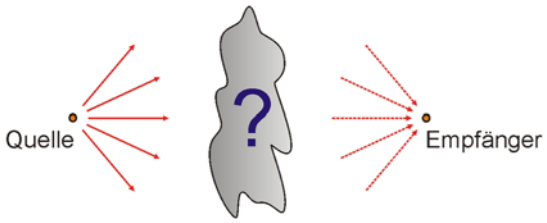


Abbildung 20: Wie können Lichtstrahlen fokussiert werden?

Das Problem dabei: wie kann das unter Berücksichtigung des Fermatschen Prinzips realisiert werden? Denn alle von der Quelle ausgehenden Lichtstrahlen müssten bis zum Empfänger den (zeitlich-) kürzesten Weg zurücklegen! Die kürzeste Verbindung ist aber sicher der direkte Weg – und den gibt es nur einmal!

Zur Lösung des Problems machen wir uns die Tatsache zunutze, dass die Geschwindigkeit von Licht in verschiedenen Medien unterschiedlich gross ist. So ist das Licht in Glas rund 1.5 – mal langsamer als in Luft. Wir stellen dem Licht auf seinen unterschiedlichen Pfaden einfach unterschiedlich lange Glasklötze in den Weg, wie in Abbildung 21 gezeigt wird. Auf diese Art kann man sicher erreichen, dass alle Lichtstrahlen die gleiche – kürzeste – Zeit benötigen. Im Rahmen des Fermat'schen Prinzips dient eine fokussierende Anordnung lediglich dazu, die Laufzeiten für sämtliche Strahlen eines Lichtbündels gleich gross zu machen. Verallgemeinert heisst das, dass

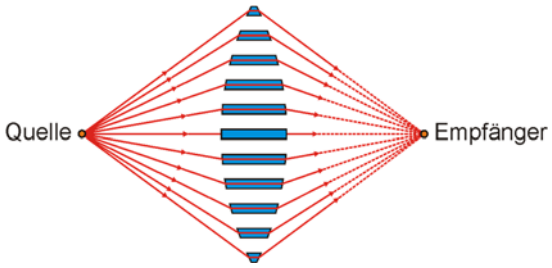


Abbildung 21: Fokussierung durch Anpassung der Lichtwege von der Quelle zum Empfänger.

bei einem fokussierenden System der Brechungsindex und die Abmessungen, der in den Strahlengang eingefügten Prismen so abgestimmt sind, dass die Zeit für sämtliche Strahlenverläufe gleich ist!

16.7 Linsen

Nach den Spiegeln betrachten wir nun optische Elemente, welche das Licht in einer gewünschten Art brechen und nicht nur zurückwerfen. Die Gesetzmässigkeiten, welche wir bereits bei den Spiegeln hergeleitet haben, können relativ einfach auf Linsen übertragen werden.

16.7.1 Die dünne Linse

Zunächst starten wir mit der Beschreibung und den Eigenschaften von dünnen Linsen. Dünn heisst, dass der Radius der Lichtbrechenden Oberfläche gross ist, sodass die beiden Grenzflächen nahe beieinander liegen. Als Folge davon kann die Linse durch eine Ebene ersetzt werden und auch die Gleichungen werden übersichtlicher.

Eine dünne Linse hat häufig einen kreisförmigen Querschnitt. Meistens sind ihre Flächen Kugelsegmente, obwohl sie auch zylindrisch oder flach (zumindest eine der Flächen) sein können, wie das in Abbildung 22 gezeigt ist. Es gibt verschiedene Linsentypen, je nachdem wie ihre Oberflächen gekrümmt sind. Eine Auflistung mir der jeweiligen Bezeichnung ist in Abbildung 23 dargestellt. Es sei angemerkt, dass die Krümmungsradien der beiden Grenzflächen nicht gleich sein müssen. Sie sollen es aber im Moment noch sein!

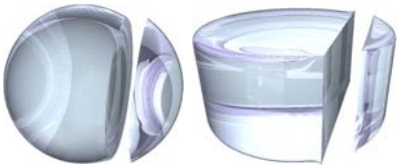


Abbildung 22: Kugel- oder Zylindersegmente formen Linsen.

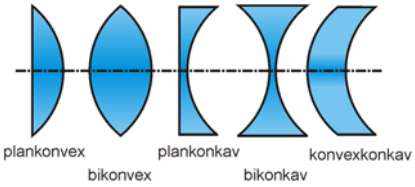


Abbildung 23: Unterschiedliche Linsentypen und ihre Bezeichnungen.

16.7.1.1 Bikonvex- und Bikonkavlinsen

Wir betrachten zunächst den Strahlengang in einer bikonvexen Linse für ein Objekt, das sich sehr weit von der Linse entfernt befindet. Dadurch sind die vom Objekt auf die Linse fallenden Strahlen – in guter Näherung – parallel zueinander. Die Linse selbst bestehe aus einem Material, dessen Brechungsindex grösser ist als der von Luft. Also z.B. aus Glas oder Kunststoff.

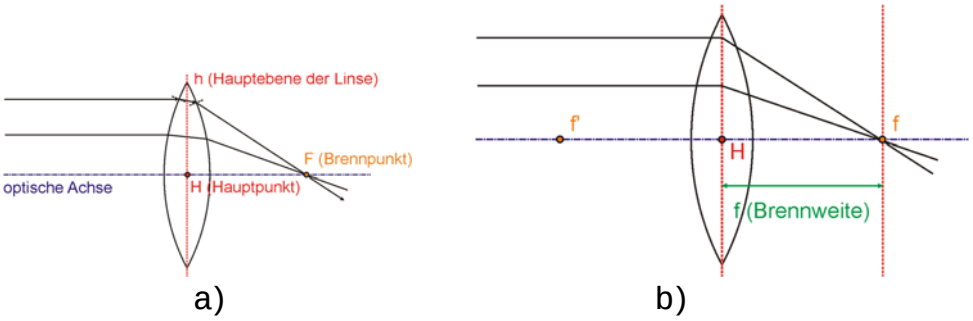


Abbildung 24: Strahlenverlauf und Bezeichnungen bei der dünnen Linse

Achsparallele Strahlen laufen – näherungsweise – in einem einzigen Punkt zusammen, dem Brennpunkt. Das ist aber nur dann der Fall, wenn einer-

seits der Krümmungsradius der Linsenflächen viel grösser ist als der Durchmesser der Linse (was bei einer dünnen Linse der Fall ist) und andererseits das ankommende Licht monochromatisch ist. Dabei wird das Licht an den zwei Grenzflächen gebrochen, wie das in Abbildung 24a) gezeigt ist. Bei dünnen Linsen lässt sich das noch vereinfachen, indem der ankommende Lichtstrahl nur an der sogenannten Hauptebene gebrochen wird, wie in Abbildung 24b) dargestellt ist. Im Konzept der dünnen Linse kann man diese also durch eine brechende Hauptebene ersetzen! Die Brennweite entspricht dann dem kleinsten Abstand von der Hauptebene zum Brennpunkt.

Die Strahlen von einem weit entfernten Objekt verlaufen linsennah in guter Näherung parallel, allerdings müssen sie nicht zwingend parallel zur optischen Achse auf die Linse treffen. In diesem Fall erfolgt die Abbildung auf einen Punkt in der Fokalebene (das ist eine Ebene parallel zur Hauptebene der Linse), wie in Abbildung 25 gezeigt ist.

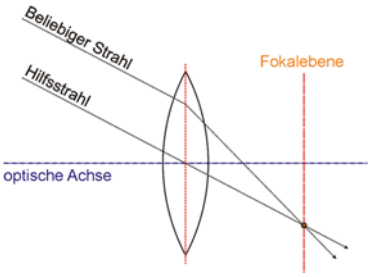


Abbildung 25: Parallel einfallende Strahlen müssen nicht parallel zur optischen Achse verlaufen.

Anders als Sammellinsen brechen Streulinsen das Licht immer von der optischen Achse weg. Der Brennpunkt kann durch die rückseitige Verlängerung der gebrochenen Strahlen als Schnittpunkt mit der optischen Achse konstruiert werden (Abbildung 26).

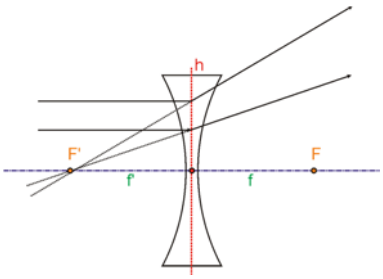


Abbildung 26: Konstruktion des Strahlenverlaufs bei der Bikonkavlinse.

16.7.2 Abbildung an dünnen Linsen

Analog zum Abschnitt 16.4.2 geht es darum, das Bild eines Objekts zu konstruieren. Dabei verwendet man zur Konstruktion eines Bildpunktes mindestens zwei der folgenden ausgezeichneten Lichtstrahlen, welche auch in Abbildung 27 dargestellt sind.

1. *Ein vom Objekt parallel zur optischen Achse einfallender Lichtstrahl verläuft nach der Brechung durch den Bildseitigen Brennpunkt.*
2. *Der Mittelpunktsstrahl verläuft durch den Hauptpunkt der Linse und wird nicht gebrochen.*
3. *Strahlen durch den Objektseitigen Brennpunkt verlaufen nach der Brechung achsparallel.*

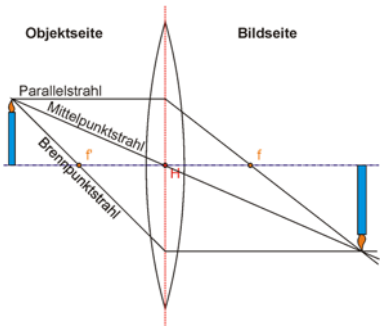
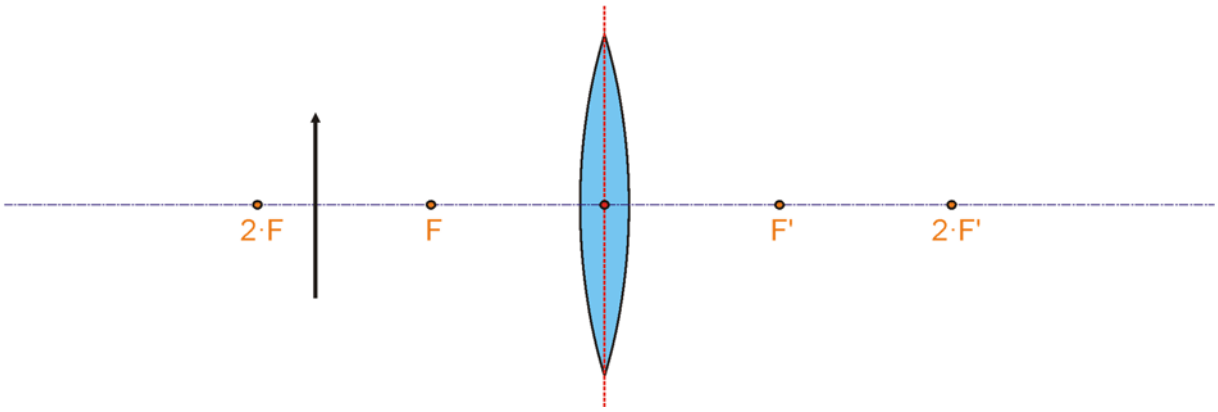
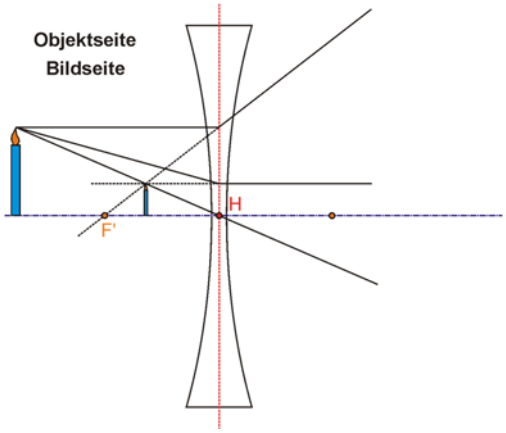


Abbildung 27: Zur Bezeichnung von ausgezeichneten Kontruktionsstrahlen.

Aufgabe: Konstruieren Sie das Bild des im Punkt O stehenden Pfeils! Handelt es sich um ein virtuelles oder reelles Bild?



Auf dieselbe Art und Weise wird das Bild einer Streulinse konstruiert:



16.7.2.1 Die Linsengleichung und die Lateralvergrösserung

Wie hängen bei der Abbildung durch eine Sammellinse die Bildweite b, die Gegenstandsweite g und die Brennweite f der Linse zusammen?

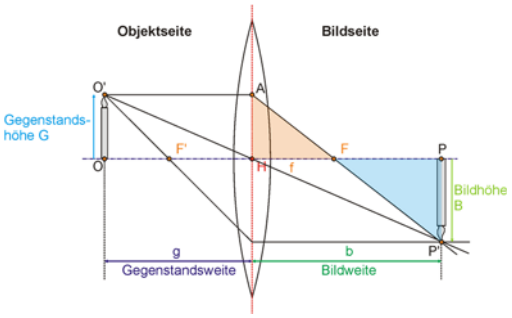


Abbildung 28: Zur Herleitung der Linsengleichung am Beispiel der Sammellinse.

(33)

Die letzte Gleichung wird Linsengleichung genannt.

Wiederholt man das Vorgehen für eine Streulinse nach Abbildung 29, so erhält man unter Berücksichtigung der Dreiecke $\Delta HOO'$ und $\Delta HPP'$

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OO'}} = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \qquad (34)$$

Da die Dreiecke $\Delta HAF'$ und $\Delta PF'P'$ ähnlich sind, gilt ausserdem

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{AH}} = \frac{B}{G} = \frac{f'-b}{f'} \qquad (35)$$

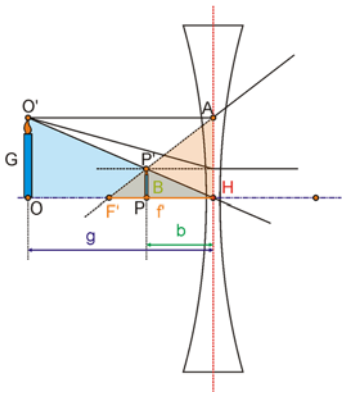


Abbildung 29: Zur Herleitung der Linsengleichung am Beispiel der Streulinse.

Die markierten Terme in (34) und (35) werden gleichgesetzt und die Sache ein wenig geordnet:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \qquad (36)$$

Das ist jetzt die Linsengleichung für eine Streulinse. Man erkennt, dass sie sich von (33) nur durch ein Vorzeichen unterscheidet. Wählt man die folgenden Vorzeichenkonventionen, so kann man auch die Streulinse mit (33) behandeln:

- Die Brennweite einer Sammellinse ist positiv, diejenige einer Streulinse ist negativ.
- Die Gegenstandsweite ist positiv, wenn der Gegenstand auf der Seite steht, wo das Licht herkommt. Sonst ist sie negativ.
- Die Bildweite ist positiv, wenn das Bild auf der der Lichtrichtung gegenüberliegenden Linsenseite entsteht, sonst ist sie negativ.
- Die Bildhöhe ist positiv, wenn das Bild die gleiche Ausrichtung wie der Gegenstand hat, sonst ist sie negativ. Die Gegenstandshöhe wird dabei immer positiv gesetzt.

Es ist leicht einzusehen, dass für die Streulinse aus Abbildung 29 sowohl die Brennweite f als auch die Bildweite b negativ einzusetzen sind und somit (36) in (33) übergeht.

Für die Lateralvergrösserung von Linsen gilt auch wieder (19), allerdings angepasst an die Begrifflichkeiten, die wir bei den Linsen verwenden:

$$m = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \tag{37}$$

16.7.3 Linsenkombinationen

Häufig werden Linsenkombinationen eingesetzt. In Abbildung 30 ist ein Linsensystem bestehend aus zwei Sammellinsen dargestellt. Welche Brennweite hat die Linsenkombination?

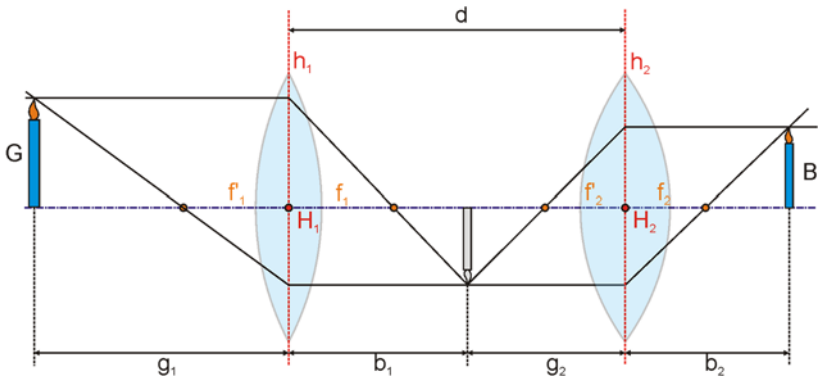


Abbildung 30: Zur Herleitung der Brennweite eines Linsensystems.

Nun lassen wir die Gegenstandsweite g_1 gegen unendlich gehen - was nichts anderes bedeutet, als das wir das einfallende Licht parallel machen - dann ist die Bildweite b_2 am Ausgang des Linsensystems identisch mit dem bildseitigen Brennpunktabstand f der Linsenkombination!

Im letzten Schritt lassen wir noch den Abstand d zwischen den Linsen verschwinden. Wir erhalten

(38)

16.7.4 Die Linsenmachergleichung

So, nun geht es ans Eingemachte – Schluss mit dünnen Linsen! Ausgehend von Abbildung 31 soll die Brennweite einer Linse hergeleitet werden, deren Krümmungsradien unterschiedlich sind. Und das Ganze unter Berücksichtigung des Brechungsindex des verwendeten Materials. Legen wir los…

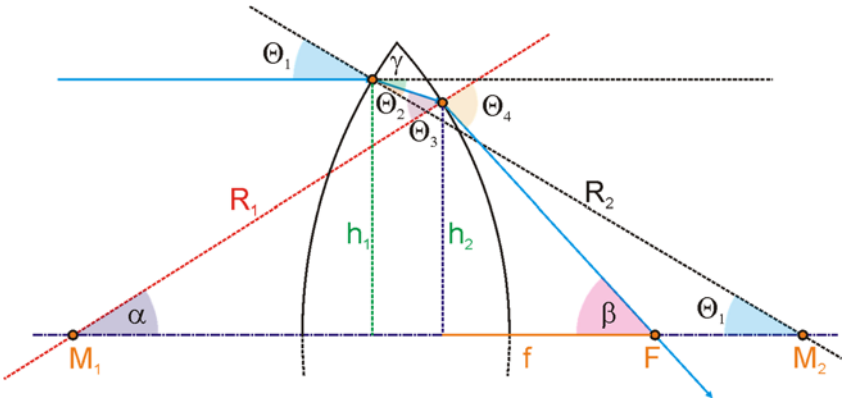


Abbildung 31: Zur Herleitung der Linsenmachergleichung.