

## 7 Einführung in die Astronomie Himmelsmechanik

Die Entdeckung der vier Galileischen Monde um Jupiter durch Galileo Galilei am 7. Januar im Jahre 1610 wurde heftig bekämpft – einige Professoren verweigerten sich sogar Galileos Aufforderung, durch sein Teleskop zu blicken.

Warum sich einige Gelehrte so störrisch verhielten, davon erzählt das folgende Kapitel.



Quelle: NASA

## Inhaltsverzeichnis

7	Einführung in die Astronomie .....	1
7.1	Anfänge .....	3
7.2	Koordinatensysteme .....	3
7.2.1	Die Jahreszeiten .....	4
7.3	Meilensteine – Weltbilder im Wandel.....	4
7.3.1	Aristarch von Samos .....	4
7.3.2	Eratosthenes von Kyrene.....	5
7.3.3	Claudius Ptolemäus .....	6
7.3.4	Niklaus Kopernikus .....	6
7.3.5	Tycho Brahe.....	7
7.3.6	Johannes Kepler .....	8
7.3.6.1	Das erste Keplersche Gesetz.....	8
7.3.6.2	Das zweite Keplersche Gesetz.....	9
7.3.6.3	Das dritte Keplersche Gesetz.....	9
7.3.7	Galileo Galilei.....	10
7.3.8	Isaac Newton .....	10
7.3.8.1	Satellitenbahnen.....	11
7.4	Anwendungen .....	12
7.4.1	Die erste kosmische Geschwindigkeit.....	12
7.4.2	Geostationäre Satellitenbahnen.....	12
7.4.3	Das 3. Keplersche Gesetz aus der Sicht von Newton.....	13
7.4.3.1	Doppelsternsysteme.....	14
7.4.4	Die Gezeitenkraft .....	15
7.4.4.1	Die Roche – Grenze (starre Körper).....	15
7.4.4.2	Die Roche – Grenze (flüssige Körper).....	16
7.5	Die potentielle Energie des Gravitationsfeldes .....	17
7.5.1	Ermittlung der Arbeit .....	17
7.5.2	Die potentielle Energie.....	17
7.5.3	Anwendungen .....	18
7.5.3.1	Fluchtgeschwindigkeit .....	18
7.5.3.2	Schwarzes Loch .....	19

## 7.1 Anfänge

Gerade im Winter, mit seinen klaren, langen Nächten kann man den Himmel sehr gut beobachten. Von den Sternbildern sind einige bekannt und werden auch gern betrachtet. Als Sternbilder bezeichnet man umgangssprachlich besonders auffällige Anordnungen von Sternen. Diese Anordnungen haben die Menschen schon seit jeher in ihren Bann gezogen. Immer wieder haben sie ihnen Namen gegeben. Und noch heute gebrauchen wir für Objekte am Himmel Namen, welche der griechischen Sagenwelt entstammen: Andromeda, Perseus, etc.

Die Geschichte der Astronomie gehört zu den ältesten Wissenschaften überhaupt und umfasst die gesamte menschliche Kulturgeschichte. Das verwundert nicht weiter, bildeten doch Kenntnisse über Himmelsereignisse die Grundlage für Kalender und diese lieferten lebenswichtige Informationen für den Ackerbau. Vor rund viertausend Jahren hatte Sirius Ende Juni seinen Morgenaufgang, kurz bevor die Sonne aufging und kündigte so die kommende Nilflut an – die ägyptischen Bauern konnten aussäen. Überhaupt nahmen die Ägypter eine Vorreiterrolle bei der Beobachtung des Himmels ein. Sie hatten genaueste Kenntnisse über den Eintritt von Ereignissen und einen Kalender, der schon 365 Tage umfasste.

## 7.2 Koordinatensysteme

Zur Beschreibung von Positionen und Bewegungen von Himmelskörpern behilft man sich mit einer Rechenfläche, der sogenannten Himmelskugel. Diese soll für uns einen unendlich grossen Radius haben, beliebig dünn und geozentrisch sein, wie in Abbildung 1 schematisch dargestellt ist. Dann besitzt die Himmelskugel ihre Pole, Himmels Nord- respektive Südpol, in der Verlängerung der Erdachse. Die beiden Äquatorebenen von Erde und Himmelskugel fallen ebenfalls zusammen. Positionen von Sternen und Himmelskörpern werden dann bezüglich dieser Himmelskugel angegeben.

Die Projektion der Bahn der Sonne auf die Himmelskugel nennt man Ekliptik. Die Ekliptikebene ist gegenüber der Himmelsäquatorebene um etwa  $23^\circ$  geneigt. Grund dafür ist die Tatsache, dass die Erdachse um diesen Winkel gegenüber ihrer Bahnebene geneigt ist. Aufgrund der Entstehungsgeschichte unseres Sonnensystems liegen die Bahnen der Planeten fast in einer Ebene. Die Planeten sind deshalb auf der Himmelskugel in Ekliptiknähe zu finden.

Die beiden Schnittpunkte  $\gamma$  und  $\Omega$  der Ekliptik mit dem Himmeläquator nennt man Frühlings- respektive Herbstpunkt. Steht die Sonne im Frühlings- oder im Herbstpunkt, so kommt es auf der Erde zur Tagundnachtgleiche. Ersteres ist am 20. oder 21. März der Fall (Frühlingsbeginn auf der Nordhalbkugel), Letzteres am 22. oder 23. September.

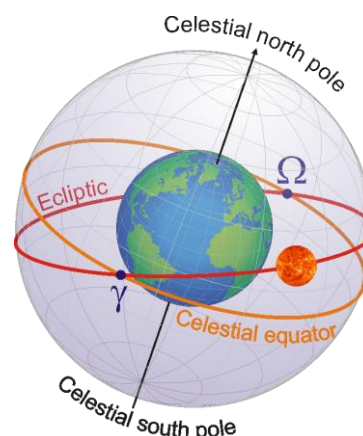


Abbildung 1 Darstellung der Erde mit Himmelskugel.

### 7.2.1 Die Jahreszeiten

Aufgrund der Neigung der Erdachse von rund  $23^\circ$  gegenüber der Ekliptik hängt die von der Sonne empfangene Strahlungsmenge an einem Tag vom Ort auf der Erde und von der Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn ab. Zweimal im Jahr, am 21. März und am 23. September kommt es zur Tagundnachtgleiche. Die Sonne steht dann senkrecht über dem Äquator.

Der 21. Juni ist der Tag der Sommersonnenwende. Es ist gleichzeitig der längste Tag. Die Sonne steht senkrecht über dem nördlichen Wendekreis. Am 21. Dezember steht die Sonne dann senkrecht über dem südlichen Wendekreis; für uns auf der Nordhalbkugel ist dann der kürzeste Tag.

Der Sonne kommt die Erde am 3. Januar am nächsten. Der Abstand ist dann mit rund 147 Millionen Kilometern rund 5 Millionen Kilometer kleiner als am 3. Juli, wenn die Erde ihren sonnenfernsten Punkt erreicht.

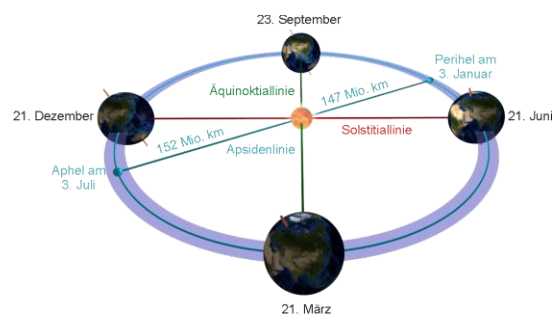


Abbildung 2 Die Jahreszeiten entstehen aufgrund der  $23^\circ$  Neigung der Erdachse gegenüber der Ekliptik.

### 7.3 Meilensteine – Weltbilder im Wandel

Obwohl sehr interessant, wollen wir hier die Astronomiegeschichte nur verkürzt behandeln und einige Meilensteine besprechen.

#### 7.3.1 Aristarch von Samos

Unsere Reise durch die verschiedenen Weltbilder beginnt zwischen den Jahren 310 v. Chr. und etwa 230 v. Chr. auf der griechischen Insel Samos mit dem Wirken des Mathematikers und Astronoms Aristarch von Samos (Abbildung 3). Er war der Erste, der die Hypothese eines heliozentrischen Weltbilds vertrat. Obwohl die Originalpublikation verschollen ist, findet man an anderer prominenter Stelle einen Hinweis darauf. So schreibt Archimedes (287 v. Chr. – 212 v. Chr.) an den König Gelon II (240 v. Chr. – 216 v. Chr., Mitregent von Syrakus):

*“You are aware that "universe" is the name given by most astronomers to the sphere, the centre of which is the centre of the earth, while its radius is equal to the straight line between the centre of the sun and the centre of the earth. This is the common account, as you have heard from astronomers. But **Aristarchus** brought out a book consisting of certain hypotheses, wherein it appears, as a consequence of the assumptions made, that the universe is many times greater than the "universe" just mentioned. **His hypotheses are that the fixed stars and the sun remain unmoved, that the earth revolves about the sun in the circumference of a circle, the sun lying in the middle of the orbit, and that the sphere of the fixed stars, situated about the same centre as the***

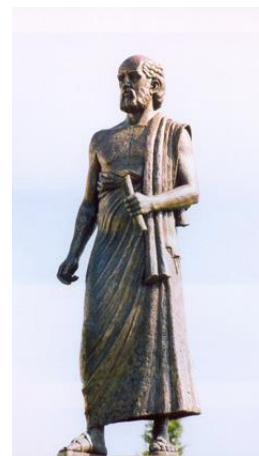


Abbildung 3 Denkman von Aristarch von Samos (310 v. Chr. bis etwa 230 v. Chr.).  
Quelle: Wikipedia

*sun, is so great that the circle in which he supposes the earth to revolve bears such a proportion to the distance of the fixed stars as the centre of the sphere bears to its surface.”<sup>1</sup>*

Leider hat sich seine Idee nicht durchgesetzt, weil die von seinen Hypothesen vorhergesagten Effekte nicht beobachtbar waren – weil schlichtweg zu klein für die damaligen Beobachter, was wiederum für das damalig akzeptierte geozentrische Weltbild sprach.

### 7.3.2 Eratosthenes von Kyrene

Zur gleichen Zeit bestimmte Eratosthenes von Kyrene (etwa 273 v. Chr. bis 194 v. Chr.) experimentell den Umfang der Erde, deren Kugelgestalt den Griechen schon lange bekannt war. Da seine Messung als Einzige der Antike wissenschaftlich fundiert ist, wollen wir sein Vorgehen hier etwas genauer unter die Lupe nehmen.

Er ging für seine Messung davon aus, dass die ägyptischen Städte Alexandria und Assuan auf demselben Meridian liegen. Am Mittag der Sommersonnenwende wurde ein Brunnen in Assuan bis auf den Grund von der Sonne beleuchtet; sie stand also genau senkrecht über dem Brunnen. Zur gleichen Zeit warf eine Säule mit der Höhe  $h$  in Alexandria einen Schatten mit der Länge  $l$ , wie dies in Abbildung 4 dargestellt ist. Damit kann man den Winkel  $\theta$  zwischen dem Lichtstrahl und der Säule berechnen. Die

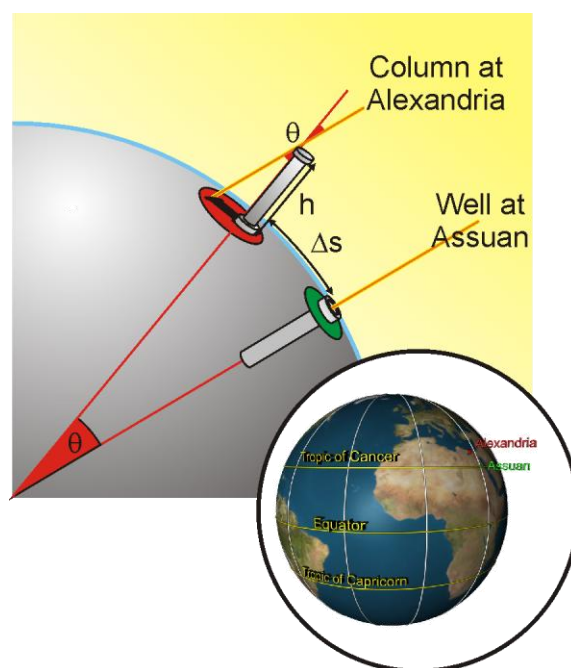


Abbildung 4 Vorgehen von Eratosthenes zur Bestimmung des Erdumfangs schematisch dargestellt.

Messung ergab einen Wert von  $7^{\circ}12'$ , was etwa  $\frac{7^{\circ}12'}{360^{\circ}} \approx \frac{1}{50}$  des Erdumfangs entspricht. Die Strecke  $\Delta s$  liess Eratosthenes wahrscheinlich durch königliche Schrittzähler zu 5000 Stadien ermitteln. Für den gesamten Umfang der Erde folgt damit  $U = 50 \cdot 5000 \text{ Stadien} = 250'000 \text{ Stadien}$ . Später korrigierte Eratosthenes den Wert auf  $252'000 \text{ Stadien}$ . Leider ist nicht überliefert, wie lang den ein Stadion war – oft werden dafür 157.5 m genannt. Für den Erdumfang gibt das dann  $U = 39'690 \text{ km}$ , was dem wahren Wert am Äquator von  $40'075 \text{ km}$  sehr nahe kommt.

Allerdings hatte die Methode einige Fehler: Eratosthenes ging davon aus, dass die Sonnenstrahlen an beiden Orten parallel auftreffen, weil die Sonne sehr weit weg ist. Das stimmt aber nicht. Ebenfalls liegen Alexandria und Assuan nicht auf demselben Meridian, denn Alexandria liegt etwa um  $3^{\circ}$  weiter westlich.

<sup>1</sup> Heath, Sir Thomas (1913). *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus ; a history of Greek astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's Treatise on the sizes and distances of the sun and moon : a new Greek text with translation and notes*. London: Oxford University Press. Zu finden im Netz unter <http://www.archive.org/details/aristarchusofsam00heatuoft>



### 7.3.3 Claudius Ptolemäus

Der griechische Mathematiker und Astronom Claudius Ptolemäus (von etwa 100 bis um 180) war wie Eratosthenes Leiter der Bibliothek von Alexandria. Er verfasste eine grosse Zusammenstellung der Mathematik und der Astronomie, den *Almagest*, welche 13 Bände umfasste und zum Standardwerk wurde. In diesem beschreibt Ptolemäus das – später nach ihm benannte – geozentrische Weltbild. Das Ptolemäische Weltbild (Abbildung 5) verwarf das Heliocentrische des Aristarch.

Nach Ptolemäus befand sich die Erde fest im Mittelpunkt des Weltalls und alle anderen Himmelskörper, inklusive Fixsternenhimmel, umkreisen diese auf perfekten Kreisen (ein Kreis galt damals als vollkommen), sogenannten Deferenten. Da sich die astronomischen Daten nicht mit dem Modell in Einklang bringen liessen – so läuft der Planet Mars z.B. eine Schlaufenbahn, war es notwendig, für die Planeten zusätzliche Kreisbahnen (Epizykeln) einzuführen, deren Mittelpunkt auf dem Deferenten lag, wie das in Abbildung 6 gezeigt ist. Das Zentrum dieses Epizykels bewegt sich auf dem Deferenten um die Erde, gleichzeitig bewegt sich der Planet auf dem Epizykel um dessen Zentrum. Als Resultat beschreibt der Planet eine Epizykloide. Vielfach hat aber selbst das nicht gereicht und es mussten weitere Epizykeln auf den Epizykeln hinzugefügt werden.

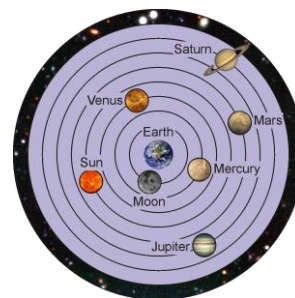


Abbildung 5 Schematische Darstellung des Ptolemäischen Weltbilds.

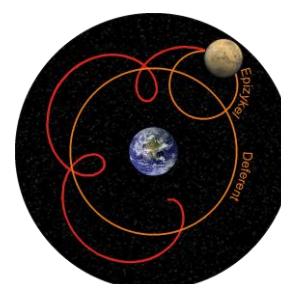


Abbildung 6 Planetenbahn nach der Epizyklen-theorie.

### 7.3.4 Niklaus Kopernikus

Erst rund 1400 Jahre später sollte das Ptolemäische Weltbild Risse bekommen. Der preussische Domherr Nikolaus Kopernikus, in Abbildung 7 ein Portrait von ihm, das um 1580 angefertigt wurde, beschäftigte sich in seiner Freizeit intensiv mit Astronomie. Um 1509 stellte er in seiner Schrift *Commentariolus*, inspiriert von den Schriften Aristarchs von Samos, die Theorie auf, dass sich die Planeten auf gleichförmigen Kreisbahnen um die Sonne bewegen und dass die scheinbare Bewegung des Fixsternhimmels eine Folge der Eigenrotation unseres Planeten ist,

wie das in Abbildung 8 schematisch dargestellt ist. Diese Theorie des Heliocentrischen Weltbildes stellte er in seinem Todesjahr 1543 erschienenen Hauptwerk *De Revolutionibus Orbium Coelestium* auf eine mathematische Basis. Ein sehr bekannter Absatz stammt aus dem ersten Band Kapitel X und lautet:

*“Die erste und oberste von allen Sphären ist die der Fixsterne, die sich selbst und alles andere enthält [...]. Es folgt als erster Planet Saturn, der in dreißig Jahren seinen Umlauf vollendet. Hierauf Jupiter mit seinem zwölfjährigen Umlauf. Dann Mars, der in zwei Jahren*

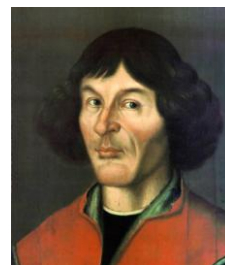


Abbildung 7 Niklaus Kopernikus (1473 – 1543). Quelle: Wikimedia

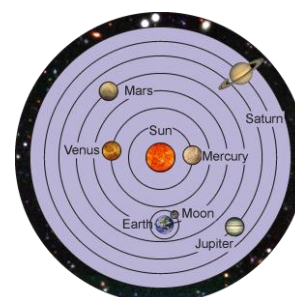


Abbildung 8 Schematische Darstellung des Kopernikanischen Weltbilds.

seine Bahn durchläuft. Den vierten Platz in der Reihe nimmt der jährliche Kreislauf ein, in dem, wie wir gesagt haben, die Erde mit der Mondbahn als Enzykel enthalten ist. An fünfter Stelle kreist Venus in neun Monaten. Die sechste Stelle schließlich nimmt Merkur ein, der in einem Zeitraum von achtzig Tagen seinen Umlauf vollendet. In der Mitte von allen aber hat die Sonne ihren Sitz.“

Leider musste auch Kopernikus wegen der Annahme von perfekten Kreisbahnen zur Erklärung der Beobachtungen auf Epizyklen zurückgreifen, wodurch sein Weltbild nur unwesentlich unkomplizierter war als das Ptolemäische.

### 7.3.5 Tycho Brahe

Der dänische Astronom Tycho Brahe (Abbildung 9) beschäftigte sich seit seinem 13. Lebensjahr mit der Astronomie. Damals weckte die Sonnenfinsternis von 1560 sein Interesse. Später beobachtete er die Supernova von 1572 im Sternbild Kassiopeia und schrieb sie dem Fixsternhimmel zu. Da zu seiner Zeit der Fixsternhimmel als ewig und unveränderlich galt, brachte ihm seine, unter dem Titel "*De nova et nullius ævi memoria prius visa Stella*" publizierte, kühne Schlussfolgerung viel Aufmerksamkeit in ganz Europa ein, widerlegte er damit doch Aristoteles. Friedrich der II von Dänemark unterstützte Brahe schliesslich mit der Öresundinsel Ven und Geld. Von 1576 an forschte er während der kommenden 21 Jahre dort. Der Tod Friedrichs II 1588 liess den Geldfluss langsam versiegen, weshalb Brahe 1597 Ven verliess und auch gleich alle Instrumente mitnahm.

Tycho Brahe hatte seine liebe Mühe mit dem kopernikanischen System und misstraute diesem, genauso, wie er aufgrund seiner sehr präzisen Beobachtungen auch die Probleme des Ptolemäischen kannte. Er vereinigte die beiden Weltbilder zu einem einzigen, das mehr seinen Beobachtungen entsprach. In seinem Vorschlag umkreisen der Mond und die Sonne die Erde, alle anderen Himmelskörper umkreisen hingegen die Sonne. Nur der Fixsternhimmel sollte sich ebenfalls innerhalb von 24 Stunden einmal um die Erde bewegen. Abbildung 10 stellt sein Tychonisches Weltbild schematisch dar.

Brahe stellte aber keine Theorie zu den Bewegungen der Himmelskörper auf, dazu reichten seine mathematischen Fähigkeiten nicht aus. So suchte er sich 1600 Hilfe beim damals 29 – jährigen Johannes Kepler. Dieser sollte ihm dabei helfen, sein tychonisches Weltbild auf eine solide Basis zu stellen. Allerdings beschnitt Brahe Keplers Zugang zu seinen Beobachtungsdaten, sodass ein vernünftiges Arbeiten kaum möglich war.



Abbildung 9 Gemälde von Tycho Brahe (1546 – 1601). Quelle: Wikipedia

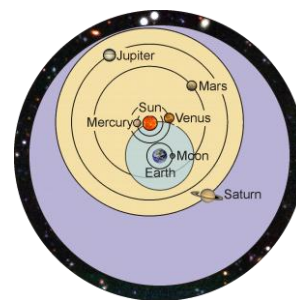


Abbildung 10 Schematische Darstellung des Tychonischen Weltbilds.

### 7.3.6 Johannes Kepler

Erst mit dem Tod Brahes im Jahre 1601 gingen alle Beobachtungsdaten in den Besitz von Johannes Kepler über, der von Kaiser Rudolf II als dessen Nachfolger eingesetzt wurde.

Der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes Kepler hatte damit auch Zugang zu den äusserst wertvollen Daten der Marsbewegung. Er erkannte darin, dass die Positionsdaten des Mars rund 8 Bogenminuten von der exakten kopernikanischen Bahn abwichen. Diese Daten und seine Überzeugung für das heliozentrische Weltbild liessen ihn schliesslich die Lösung finden, welche er 1609 in seinem Werk "Astronomia Nova" veröffentlichte. Es enthielt die heute nach ihm benannten ersten beiden keplerschen Gesetze.



Abbildung 11 Gemälde von Johannes Kepler (1571 – 1630) im Alter von 39 Jahren.

#### 7.3.6.1 Das erste Keplersche Gesetz



Alle Planeten eines Sonnensystems bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt das Zentralgestirn (Sonne) steht.

Diese Erkenntnis ist nicht trivial, da die Bahnen der grossen Planeten fast kreisförmig sind. Nur die beobachtbare Marsbahn weicht erheblich von der idealen Kreisform ab, weshalb erst die Analyse der Marsbahndaten schliesslich den Durchbruch brachte.

In Abbildung 12 ist das erste keplersche Gesetz schematisch dargestellt. Eine Ellipse besitzt zwei Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$ . Für eine elliptische Bahn gilt, dass die Strecke  $\overline{F_1TF_2}$  für jeden beliebigen Punkt  $T$  gleich lang ist. Die Strecke  $a = \overline{MP}$  nennt man grosse Bahnhalbachse, während  $b = \overline{MS}$  die kleine Bahnhalbachse genannt wird. Die Strecke  $e = \overline{MF_1}$  ist die lineare Exzentrizität.

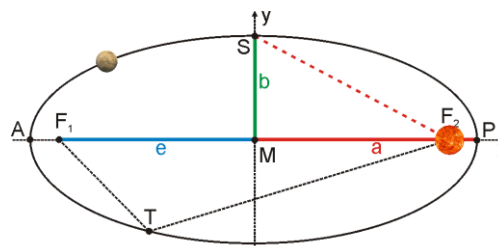


Abbildung 12 Wichtige Begriffe zu den keplerschen Planetenbahnen.

Weiter gibt es noch die numerische Exzentrizität  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ , welche ein Mass für die Elliptizität ist.

Die beiden Apsiden  $A$  respektive  $P$  erhalten ihre Namen nach dem Zentralkörper. Ist die Sonne der Zentralkörper (helios), so lautet die Endung "-hel". Im sonnen nächsten Punkt  $P$  befindet sich ein Planet somit im Perihel, im sonnenfernsten Punkt  $A$  entsprechend im Aphel. Für Satelliten, welche die Erde (gaia) umkreisen spricht man beim erdnächsten Punkt von *Perigäum* und beim erdfernsten Punkt von *Apo-gäum*.



## 7.3.6.2 Das zweite Keplersche Gesetz...

...ist auch als Flächensatz bekannt:



Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Abbildung 13 zeigt den Zusammenhang schematisch. Der Planet befinde sich an Position 1. Nach einer gewissen Zeit  $\Delta t$  (z.B. einem Monat) schliesslich an Position 2. Zu einem späteren Zeitpunkt sei der Planet an Position 3. Wiederum wird die Zeitspanne  $\Delta t$  gewartet, während der der Planet bis zur Position 4 gewandert ist. Die beiden eingefärbten Flächen sind dann gleich gross.

So kompliziert das auch tönen mag, es besagt lediglich, dass sich ein Planet langsamer bewegt, wenn er sich weit weg von der Sonne befindet und schneller, wenn er sich seinem Zentralgestirn nahe befindet. Die grössten Geschwindigkeiten besitzen Planeten dementsprechend im Perihel und die kleinste im Aphel.

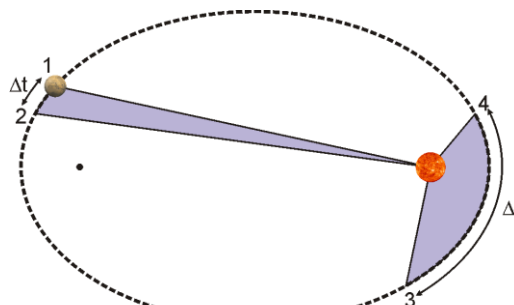


Abbildung 13 Schematische Darstellung des zweiten keplerschen Gesetzes (Flächensatz).

## 7.3.6.3 Das dritte Keplersche Gesetz

Erst nach weiteren zehn Jahren intensiver Analyse der Marsbahndaten konnte er 1619 in seinem Werk "*Harmonices Mundi libri*" das dritte nach ihm benannte Gesetz formulieren:



Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T_1$  und  $T_2$  zweier Planeten mit demselben Zentralgestirn verhalten sich zueinander wie die grossen Bahnachsen  $a_1$  respektive  $a_2$  zueinander in der dritten Potenz.

In mathematischer Form lautet das dritte keplersche Gesetz also:



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (7.1)$$

(7.1) kann man auch in der Form

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = konst. \quad (7.2)$$

schreiben. Für jeden Trabanten eines gegebenen Zentralsterns besitzt also das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit zur dritten Potenz der grossen Bahnhalbachse denselben Wert.

Dieses Gesetz gilt natürlich nicht nur für Planeten, die sich um eine Sonne bewegen, sondern es gilt auch für Satelliten, welche ihre Zentralkörper umkreisen. Die Konstante hat dann aber natürlich einen für das System charakteristischen Wert.

### 7.3.7 Galileo Galilei

Nachdem im Jahr 1608 vom Holländer Jan Lippershey endlich das Fernrohr erfunden worden war, hörte ein Jahr später auch der italienische Mathematiker, Physiker und Astronom Galileo Galilei (Abbildung 15) davon. Mit einem Nachbau vom Fernrohr begann er als einer der ersten Forscher den Himmel damit zu erkunden. Er entdeckte die Rauheit der Mondoberfläche, dass die Milchstrasse aus vielen einzelnen Sternen besteht und die, heut nach ihm benannten, Galileischen Monde des Jupiters (Abbildung 14). Mit diesen hatte Galilei ein erstes Beispiel dafür gefunden, dass sich nicht alle Himmelskörper um die Erde bewegen. Einige Professoren in Florenz weigerten sich deshalb, durch sein Teleskop zu blicken.

Galileo Galilei wusste, dass seine Beobachtungen das Kopernikanische Weltbild stützten (mit den Ellipsenbahnen, welche Kepler verwendete, war er aber nicht einverstanden). Diese Unterstützung für das heliozentrische Weltbild führte schliesslich zu einem Inquisitionsprozess, da die katholische Kirche natürlich das Ptolemäische Weltbild verteidigen wollte. Dieses passte besser zur Auslegung der Bibel. Galilei wurde im Prozess von 1633 zu Hausarrest verurteilt, während dem er 1642 völlig erblindet starb. Erst

1992 wurde er von der katholischen Kirche rehabilitiert, nachdem Papst Johannes Paul II eine Aufarbeitung des Falls in Auftrag gegeben hatte. Erst 1822 hatte die Kirche zum ersten Mal ein Buch gutgeheissen, in dem das Heliozentrische Weltbild als physikalische Realität behandelt wurde.

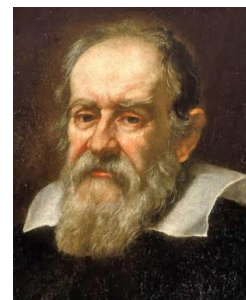


Abbildung 15 Galileo Galilei (1564 - 1642).  
Quelle: Wikipedia



Abbildung 14 Etwa so wird Galileo die vier grössten Jupitermonde erblickt haben.

### 7.3.8 Isaac Newton

Die Welt sollte bis ins Jahr 1687 auf den nächsten grossen Schritt warten müssen. Dann nämlich veröffentlichte der englische Naturforscher Isaac Newton (Abbildung 16) sein rund 600 Seiten starke, dreibändige Werk *“Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“*. Darin führte er das Prinzip der absoluten Zeit ein, legte die Basis für die klassische Mechanik mit seinen berühmten Grundgleichungen der Bewegungen und er leitete das Gesetz der Schwerkraft ab, womit der die Erkenntnisse von Kepler und Galilei vereinigte.

Der Gedankengang zur gravitativen Anziehung zweier Massen geht nach Newton etwa so, wie in Abbildung 17 dargestellt ist: In Gedanken steigt man auf einen hohen Berg und stelle sich vor, dass man einen Körper mit unterschiedlicher Startgeschwindigkeit parallel zur Erdoberfläche wegwirft. Wenn die Erde flach wäre, so würde der Körper immer die Erdoberfläche treffen. Da die Erde aber rund ist, krümmt sich ihre Oberfläche unter der Geschossbahn weg. Bei einer gewissen Startgeschwindigkeit wird die gekrümmte Flugbahn gerade der Krümmung der Erdoberfläche folgen – der Körper wird folglich nie zu Boden fallen. Dies trifft genauso auch auf den Mond zu, der ja auch ständig um die Erde kreist (und trotzdem nicht zu Boden fällt). Newton schloss daraus, dass der Mond deshalb



Abbildung 16 Sir Isaac Newton 1642 – 1726. Quelle: Wikipedia

die Erde umrundet, weil zwischen ihm und der Erde eine Anziehende Kraft wirkt. Zur Verallgemeinerung schrieb er in der "Principia":

*"Im selben Jahr (1666) begann ich darüber nachzudenken, ob die Schwerkraft bis zur Umlaufbahn des Mondes reicht. Nachdem ich herausgefunden hatte, wie die Kraft abzuschätzen ist, mit der eine in einer Kugel umlaufende Kugel auf die Kugel der Oberfläche drückt, leitete ich aus Keplers Regel, nach der sich die periodischen Zeiten der Planeten im Verhältnis drei zu zwei zum Abstand vom Mittelpunkt ihrer Umlaufbahn verhalten, ab, dass die Kräfte, die die Planeten in ihren Umlaufbahnen halten, dem Quadrat ihrer Abstände von jenen Zentren, um die sie laufen, reziprok sein müssen.*

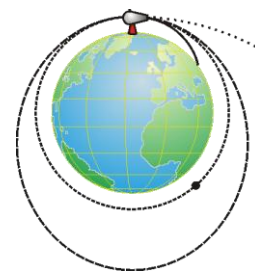


Abbildung 17 Gedankenexperiment von Newton zu Satellitenbahnen.

Durch Kombination seines dritten Axioms (Actio = Reactio) mit dem dritten Keplerschen Gesetz erhielt er den folgenden Ausdruck für die Kraft  $F$ , mit der sich zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  (Schwerpunktsabstände) gegenseitig anziehen

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{7.3}$$

Die Konstante  $G^2$  heisst Gravitationskonstante. Ihr Wert ist im ganzen Universum gleich gross und beträgt

$$G = 6.67 \cdot 10^{11} \frac{Nm^2}{kg^2} \tag{7.4}$$

Experimentell kann dieser Wert auf der Erde z.B. durch eine Drehwaage bestimmt werden. Der Aufbau ist in Abbildung 18 dargestellt.

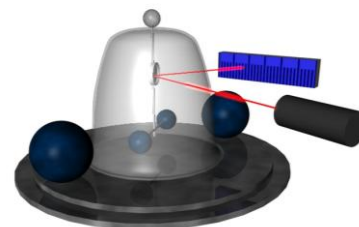


Abbildung 18 Drehwaage nach Cavendish zur Bestimmung der Gravitationskonstanten.

### 7.3.8.1 Satellitenbahnen

Newton hat zeigte in der "Principia", dass für die Bahnen von Himmelskörpern um einen Zentralkörper nicht nur Ellipsen in Frage kommen sondern grundsätzlich alle Kegelschnitte. Die Bahnform hängt dabei von der Geschwindigkeit des Satelliten ab. Eine Übersicht gibt Tabelle 1.

Tabelle 1 Bahnformen von Satelliten in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit

$v$ .  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnen die erste respektive zweite kosmische Geschwindigkeit.

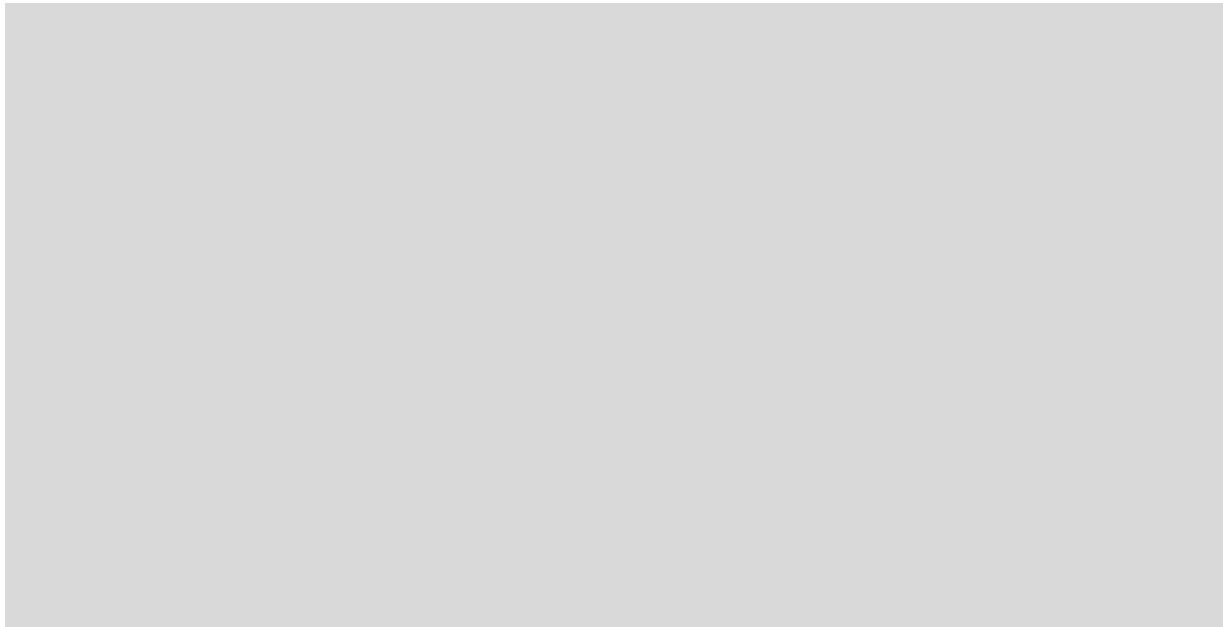
Startgeschwindigkeit $v$	Bahnform
$0 < v < v_1$	Ellipse
$v = v_1$	Kreis
$v_1 < v < v_2$	Ellipse
$v = v_2$	Parabel
$v_2 < v < \infty$	Hyperbel

<sup>2</sup> Häufig wird auch der griechische Buchstabe  $\gamma$  anstelle von  $G$  verwendet.

## 7.4 Anwendungen

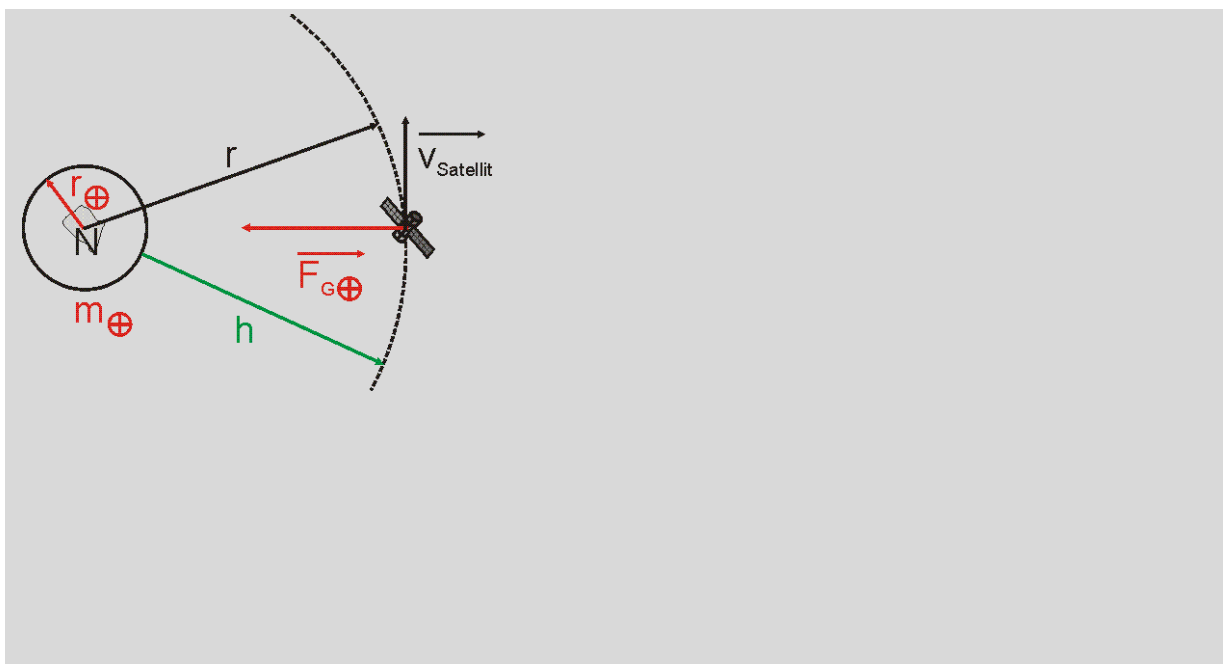
### 7.4.1 Die erste kosmische Geschwindigkeit

Stellen wir uns mal die Frage, welche Geschwindigkeit ein Satellit denn haben müsste, damit er auf seiner Umlaufbahn genau an der Erdoberfläche entlang schrammen würde? Und wie lange würde ein Umlauf dauern?



### 7.4.2 Geostationäre Satellitenbahnen

Die zweite Frage, welche als Beispiel behandelt werden soll ist, wo Satelliten positioniert werden müssen, damit sie von der Erde aus gesehen immer am selben Ort stehen. Solchen Satelliten sind geostationär.





### 7.4.3 Das 3. Keplersche Gesetz aus der Sicht von Newton

Wir erinnern uns noch einmal an das dritte Keplersche Gesetz aus (7.2). Das bedeutet – wie schon diskutiert – dass der Quotient  $\frac{a^3}{T^2}$  für jeden Planeten innerhalb eines Sonnensystems denselben Wert hat. Wir möchten diese Konstante jetzt berechnen, wie dies Newton schon gemacht hat.

Dazu betrachten wir eine Sonne und einen Planeten. Beide Himmelskörper ziehen *einander* an, und kreisen somit um ein *gemeinsames* Zentrum  $O$ . Dies ist in etwas übertriebener Art und Weise in Abbildung 19 dargestellt.

Wir bezeichnen mit  $x$  den Abstand der Sonne vom Schwerpunkt und mit  $r$  den Abstand Sonne – Planet. Der Abstand des Planeten vom Drehpunkt ist dann  $r-x$ . Auf die Sonne wirken die Zentripetalkräfte

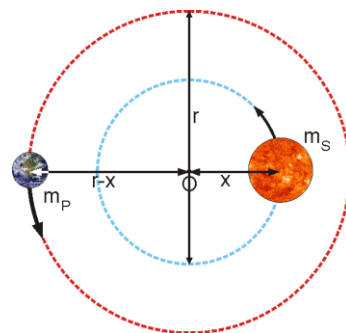


Abbildung 19 Zum Keplerschen Gesetz.

$$\frac{m_S \cdot v_S^2}{x} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2} \quad (7.5)$$

und auf den Planeten

$$\frac{m_P \cdot v_P^2}{r-x} = G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2} \quad (7.6)$$

Wir ersetzen in den Gleichungen die Geschwindigkeiten durch  $v_S = \frac{2\pi x}{T}$  und  $v_P = \frac{2\pi(r-x)}{T}$ , teilen gleichzeitig durch  $m_S$  respektive  $m_P$  und erhalten damit

$$\frac{4\pi^2 x}{T^2} = G \cdot \frac{m_S}{r^2} \quad (7.7)$$

und

$$\frac{4\pi^2 (r-x)}{T^2} = G \cdot \frac{m_P}{r^2} \quad (7.8)$$

Wir addieren (7.7) und (7.8) und bekommen  $\frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} = G \cdot \frac{(m_S + m_P)}{r^2}$  oder eben

$$\frac{r^3}{T^2} = G \cdot \frac{m_S + m_P}{4\pi^2} \quad (7.9)$$

Man kann nun zeigen, dass für nicht kreisförmige Bahnen der Radius  $r$  durch die grosse Bahnhalbachse  $a$  ersetzt werden darf! Es gilt also auch



$$\frac{a^3}{T^2} = G \cdot \frac{m_S + m_P}{4\pi^2} \quad (7.10)$$

Kepler irrte also, als er sagte, dass der Quotient  $\frac{a^3}{T^2}$  für alle Planeten gleich gross sei. Der Quotient hängt von der Masse der Sonne *und* der Masse des Planeten ab! Falls  $m_s \gg m_p$  ist, vereinfacht sich (7.10) auf

$$\frac{a^3}{T^2} \approx G \cdot \frac{m_s}{4\pi^2} = \text{konst.} \quad (7.11)$$

Das ist aber genau (7.2). Kepler konnte mit seinen Beobachtungsdaten die kleinen Abweichungen nicht erkennen. Das ist kein Wunder, besitzt die Sonne doch eine Masse, welche rund 1000 Mal grösser ist, als alle Planeten des Sonnensystems zusammengenommen.

#### 7.4.3.1 Doppelsternsysteme

Im Sternbild Perseus (Abbildung 20) findet man eine seltsame Erscheinung: Der Stern Algol (arab. "der Dämon") verändert seine scheinbare Helligkeit periodisch innerhalb von rund drei Tagen. Er ist der zweithellste (beta) Stern im Sternbild.

Die Helligkeitsschwankung kommt daher zustande, dass sich eigentlich zwei Sterne miteinander um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen und sich damit immer wieder gegenseitig bedecken (sog. *bedeckungsveränderlicher Stern*). Abbildung 21 zeigt die Situation. Bei Algol A handelt es sich um einen massereichen Stern ( $3.7 \cdot m_\odot$ ), welcher etwa 98 mal so hell leuchtet wie unsere Sonne, Algol B ( $0.8 \cdot m_\odot$ ) leuchtet nur etwa 3.4 mal so hell wie unsere Sonne. Aus den Beobachtungen weiss man, dass das Verhältnis der beiden grossen Bahnhalbachsen

von Algol A und Algol B  $\frac{a_{\text{Algol B}}}{a_{\text{Algol A}}} = 4.625$  beträgt und

sich beide Sterne in 2.87 Tagen einmal in einem Abstand von 0.065 AE umrunden. Auf den folgenden Zeilen wollen wir aus diesen Angaben die Masse der beiden Sterne berechnen.

Aus (7.10) erhält man

$$m_{\text{Algol A}} + m_{\text{Algol B}} = \frac{a^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot T^2} = 8.87 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

Im nächsten Schritt passen wir (7.7) und (7.8) auf das vorliegende Problem an. Wir erhalten

$$\frac{4\pi^2 a_1}{T^2} = G \cdot \frac{m_1}{r^2} \quad (7.12)$$

und

$$\frac{4\pi^2 a_2}{T^2} = G \cdot \frac{m_2}{r^2}. \quad (7.13)$$

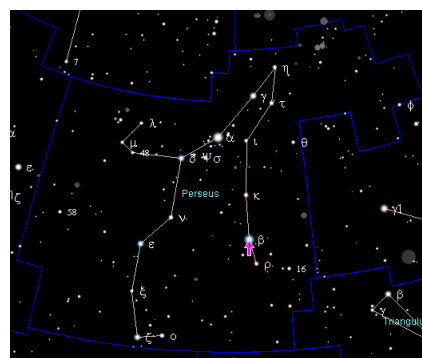


Abbildung 20 Im Sternbild Perseus befindet sich das Doppelsternsystem Algol A und B. Quelle: Wikipedia

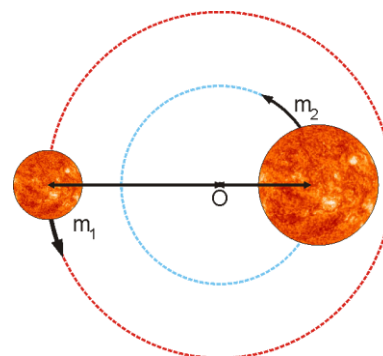


Abbildung 21 Doppelsternsystem schematisch dargestellt.

Diesmal addieren wir nicht, sondern lösen nach  $T^2$  auf, setzen gleich und bekommen

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (7.14)$$

Aha, kennt man also das Verhältnis der beiden grossen Bahnhalbachsen, so kennt man automatisch auch das Massenverhältnis! Dies beträgt in unserem Fall

$\frac{m_{\text{AlgolA}}}{m_{\text{AlgolB}}} = 4.625$ . Wir kennen nun die Summe der Massen und deren Verhältnis. Dar-  
aus lassen sich die beiden Teilmassen berechnen. Man erhält  $m_{\text{AlgolB}} = 0.8 \cdot m_{\odot}$  und  
 $m_{\text{AlgolA}} = 3.7 \cdot m_{\odot}$ .

#### 7.4.4 Die Gezeitenkraft

Unser Mond wird durch die Erde angezogen. Wie wir bereits gesehen haben, nimmt die Gravitationskraft quadratisch mit dem Abstand zweier Körper ab. Die Mondoberfläche ist der Erde rund 1738 km (Mondradius) näher, als der Mondmittelpunkt. Dadurch erfährt ein Massenpunkt  $\mu$  auf der der Erde zugewandten Seite der Mondoberfläche eine grössere Gravitationskraft, als ein Massenpunkt im Mondschwerpunkt, weil der Mond eben keine punktförmige Masse ist, wie dies in Abbildung 22 gezeigt ist. Die Differenz dieser beiden Kräfte nennt man *Gezeitenkraft*. Dabei gilt, wenn man die Kräfte auf eine Probemasse  $\mu$  betrachtet

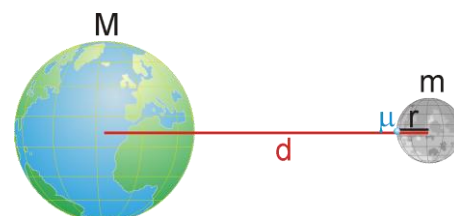


Abbildung 22 Zur Herleitung der Gezeitenkraft.

$$F_{\text{Gez}} = F_{G,\text{Oberfläche}} - F_{G,\text{Schwerpunkt}} = G \cdot M \cdot \mu \cdot \left( \frac{1}{(d-r)^2} - \frac{1}{d^2} \right) = GM\mu \left( \frac{(2d-r) \cdot r}{(d-r)^2 \cdot d^2} \right). \quad (7.15)$$

Falls der Radius des Objekts sehr viel kleiner ist, als der Abstand der beiden Objekte ( $r \ll d$ ), so lässt sich obiger Ausdruck zu

$$F_{\text{Gez}} \approx G \cdot \frac{M \cdot \mu}{d^3} \cdot 2r \quad (7.16)$$

vereinfachen.

##### 7.4.4.1 Die Roche – Grenze (starre Körper)

Durch die Gezeitenkraft wird z.B. unser Mond von der Erde in die Länge gezogen. Käme der Mond der Erde näher, so würde irgendwann die Gezeitenkraft grösser werden, als die Gravitationskraft, mit welcher eine Masse  $\mu$  an der Mondoberfläche "festgehalten" wird. Der Mond würde also "zerrissen" werden. Dieser Vorgang passiert mit einem Körper der Masse  $m$  allgemein dann, wenn die Gezeitenkraft aus


(7.16) auf die an der Oberfläche von  $m$  liegende Masse  $\mu$  erzeugt durch  $M$  gleich gross wird wie die Gravitationskraft von  $m$  auf dieselbe Masse. Das lässt sich so schreiben:

$$2Gr \frac{M \cdot \mu}{d^3} = G \frac{m \cdot \mu}{r^3}. \quad (7.17)$$

Aufgelöst nach dem kritischen Abstand  $d$  bekommt man

$$d = r \cdot \left( 2 \cdot \frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.18)$$

Drückt man nun noch die Massen durch die entsprechenden Volumina und Dichten aus  $\left( M = \rho_M \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot R^3, m = \rho_m \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3 \right)$ , so erhält man schliesslich



$$d_{\text{fest}} = r \cdot \left( 2 \cdot \frac{R^3 \cdot \rho_M}{r^3 \cdot \rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} = R \cdot \left( 2 \cdot \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.260 \cdot R \cdot \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.19)$$

Diesen Abstand nennt man *Roche – Grenze*. Ist der Abstand eines Körpers kleiner als seine entsprechende Roche – Grenze, so wird er von den Gravitationskräften des grösseren Himmelskörpers zerrissen.

Für unseren Mond erhält man bezüglich der Erde eine Roche – Grenze von  $d_{\text{fest}} = 9496 \text{ km}$ . Tatsächlich findet man den Mond im Mittel in einer Entfernung von  $384'000 \text{ km}$  von der Erde – der Mond ist also sicher.

#### 7.4.4.2 Die Roche – Grenze (flüssige Körper)

Bei obiger Herleitung haben wir angenommen, dass der betroffene Trabant fest ist. Ist der Satellit hingegen flüssig, so setzt er seiner Verformung keinen oder nur einen sehr geringen Widerstand entgegen. Er wird deshalb schon viel früher auseinandergezogen. Die Roche – Grenze verdoppelt sich dann etwa:

$$d_{\text{flüssig}} = 2.423 \cdot R \cdot \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7.20)$$

Man geht davon aus, dass ein Teil der Ringe von Saturn, in Abbildung 23 eine Aufnahme vom Weltraumteleskop Hubble, entstanden sind, als ihm ein Mond zu nahe kam und von den Gezeitenkräften zerrissen wurde.



Abbildung 23 Saturns Ringe – eine Augenweide. Quelle: [www.hubblesite.org](http://www.hubblesite.org)



## 7.5 Die potentielle Energie des Gravitationsfeldes

Wie man die Arbeit berechnet, die benötigt wird, einen Körper der Masse  $m$  um die Höhe  $\Delta h$  zu heben, ist ihnen sicherlich noch bekannt:

$$W_{\text{Hub}} = F_G \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h. \quad (7.21)$$

Nun ist es aber so, dass diese Formel nur gilt, falls entlang von  $\Delta h$  sich die Gravitationskraft  $F_G$  respektive die Fallbeschleunigung  $g$  nicht ändert. Die Gravitationskraft ist aber eine Funktion des Abstands vom Massenmittelpunkt, wie man dem Gravitationsgesetz entnehmen kann:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (7.22)$$

### 7.5.1 Ermittlung der Arbeit

Nach (7.22) ändert sich die Gewichtskraft, wenn man einen Körper von der Erdoberfläche auf eine sehr grosse Höhe bringen will, wie das bei künstlichen Satelliten der Fall ist. Wie berechnet man aber in diesem Fall die benötigte Arbeit? Die Abbildung 24 zeigt die Lösung des Problems auf grafische Weise. Die Arbeit entspricht der Fläche unter der Kurve im Kraft – Abstands – Diagramm. Für die Berechnung braucht man Integralrechnung; darauf wollen wir hier aber nicht eingehen. Das Resultat soll genügen:

$$W = GmM \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (7.23)$$

Das ist die Arbeit, welche an einem kugelförmigen Körper mit der Masse  $m$  verrichten muss, um ihn im Bereich der Masse  $M$  aus einer Entfernung  $r_A$  nach  $r_B$  zu bringen.

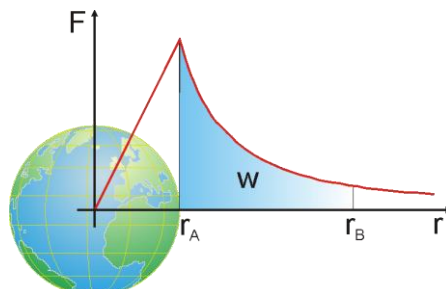


Abbildung 24 Zur Berechnung der Arbeit im Gravitationsfeld.

### 7.5.2 Die potentielle Energie

Stürzt ein Satellit ab, so wird an ihm nach (7.23) Arbeit verrichtet, welche den Satelliten zur Erdoberfläche hin beschleunigt. Für die Zunahme an kinetischer Energie gilt damit

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = W = GmM \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (7.24)$$

Multipliziert man (7.24) aus und sortiert nach den Indizes, so hat man ein "Aha"-Erlebnis:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{mM}{r_B}. \quad (7.25)$$

Durch einen Vergleich von (7.25) mit dem Energieerhaltungssatz  $E_{Kin} + E_{pot} = konst.$  erkennt man, dass es sich beim zweiten Term auf beiden Seiten um die potentielle Energie handeln muss:



$$E_{pot} = -G\frac{mM}{r}. \quad (7.26)$$

Das Minuszeichen in (7.26) ist reine Definition. Es gibt an, dass die potentielle Energie umso negativer wird, je näher man der Masse kommt. Entsprechend bedeutet das, dass man Energie aufwenden muss, um von der Masse wegzukommen – man muss die Kurve der potentiellen Energie “hochklettern” und dazu muss man Arbeit verrichten. Abbildung 25 zeigt die grafische Darstellung der potentiellen Energie als Funktion des Abstands vom Massenmittelpunkt,

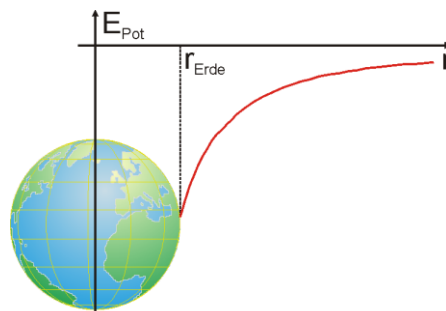


Abbildung 25 Grafische Darstellung von (7.26). Der Nullpunkt der potentiellen Energie liegt im Unendlichen.

## 7.5.3 Anwendungen

### 7.5.3.1 Fluchtgeschwindigkeit

Ein Satellit soll von der Erdoberfläche abgeschossen werden, um den Weltraum zu erkunden. Welche Geschwindigkeit muss der Satellit mindestens besitzen, damit er den Gravitationsbereich der Erde verlassen kann? Man nennt diese Geschwindigkeit “Fluchtgeschwindigkeit“ oder 2. kosmische Geschwindigkeit.

### 7.5.3.2 Schwarzes Loch

Auf welchen Durchmesser müsste man die Erde zusammenpressen, damit die Fluchtgeschwindigkeit  $v=300'000\frac{km}{s}$  betragen würde?

