

Elektromagnetische Wellen

Licht als Welle

10 Einleitung

Die aus dem täglichen Leben geläufigen optischen Effekte wie Reflexion und Brechung sind seit langem bekannt. Fällt ein Lichtstrahl¹ auf ein transparentes Material mit glatter Oberfläche, so wird er in zwei Teile zerlegt. Der eine Teil des Lichtstrahls wird von der Oberfläche zurückgeworfen (reflektierter Strahl), während der andere Teil ins Material eindringt und dabei seine ursprüngliche Fortpflanzungsrichtung ändert (gebrochener Strahl). Die dahinterstehenden Gesetzmässigkeiten wurden schon früh untersucht. Das Reflexionsgesetz geht auf Euklid (etwa 300 v. Chr.) und das Brechungsgesetz auf Ptolemäus (etwa 150 n. Chr.) zurück. Im Bereich der geometrischen Optik erlauben sie die Berechnung und damit die Herstellung optischer Instrumente.



Abbildung 10.1-1 Reflexion des Matterhorns, gespiegelt im Riffelsee. Quelle: Dirk Beyer, Wikipedia, 2005

Mit der Beschreibung der Phänomene hat man aber noch keine Erklärung dafür. Im Jahre 1672 hat Isaac Newton als erster eine Theorie zur der Reflexion und Brechung von Licht entwickelt. Er nahm dabei an, dass Licht in Form von Teilchen unterwegs sei. Damit konnte Newton die beiden Phänomene zwar erklären, jedoch hatte seine Theorie auch Schwächen: Lichtstrahlen z.B. können sich ungehindert durchdringen – wie sollte das mit Licht als Teilchenstrom funktionieren? Ausserdem kann man beobachten, dass beim Auftreffen eines Lichtstrahls auf einen transparenten Körper ein Teil des Strahls reflektiert wird, ein anderer Teil jedoch gebrochen in den Körper eindringt. Auch diese Tatsache bereitete dem Teilchenmodell von Newton Probleme.

Dem holländischen Physiker schien es, dass diese beiden Tatsachen eher auf eine Wellentheorie hinviesen. 1690 veröffentlichte er seine Ideen dazu, die er bereits 1678 der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegt hatte, in seinem berühmten Werk "Traité de la Lumière". Mit der Wellentheorie vermochte Huygens nicht nur die mit der Newtonschen Theorie unerklärlichen Effekte zu deuten, er konnte auch die Gesetze der Reflexion und Brechung herleiten.



Abbildung 10.1-2 Christiaan Huygens (1629 - 1695). Quelle: Wikipedia

Doch wer hatte nun recht – Newton oder Huygens? Ist das Licht nun als Teilchenstrom oder als Welle unterwegs? Ein definitiver Entscheid sollte über 150 Jahre auf sich warten lassen: in der Theorie von Newton müsste sich der gebrochene Strahl im Körper schneller als das Licht im Vakuum bewegen, nach der Theorie von Huygens langsamer. Aufgrund erheblicher experimenteller Schwierigkeiten konnte die Lichtgeschwindigkeit in Wasser erst 1862 von Leon Foucault gemessen werden – sie war kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit! Damit waren die Würfel zugunsten der Huygensschen Wellentheorie des Lichtes gefallen.



Abbildung 10.1-3 Jean Bernard Léon Foucault (1819 - 1868). Quelle: Wikipedia

¹ Was auch immer das ist...

10.1 Grundlagen der Huygensschen Lichttheorie

Licht ist also als Welle unterwegs. Zur Erklärung optischer Phänomene bedienen wir uns des, aus dem Kapitel "Wellen" bekannten Huygensschen Prinzips, mit dem Huygens die Eigenschaften von Licht zu deuten vermochte:



Jeder Punkt einer Welle lässt sich als Ausgangspunkt einer Elementarwelle sehen. Wellenfronten entstehen durch die Überlagerung vieler Elementarwellen und die Wellenfront schliesslich ist die Einhüllende aller Elementarwellen.

Die bereits bekannten Lichtstrahlen entsprechen dann der Ausbreitungsrichtung der Wellenflächen.

10.2 Das Reflexionsgesetz

Mit Hilfe des Huygensschen Prinzips wollen wir nun die Reflexion von Lichtwellen erklären. Betrachten wir dazu die Abbildung 10.2-1. In a) fällt die Wellenfront eines Lichtstrahls unter dem Winkel θ aus der Luft auf eine reflektierende Oberfläche, z.B. einen Spiegel. Die Wellenfronten sind zur besseren Darstellung rot hervorgehoben. In der Abbildung b) ist der Winkel θ aus Darstellungsgründen zur Normalen eingezeichnet.

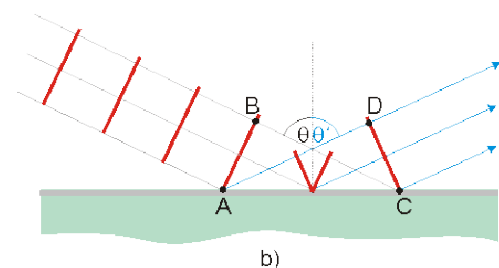
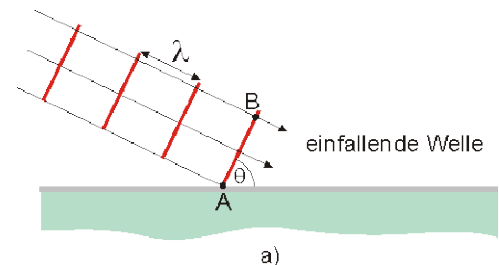


Abbildung 10.2-1

Die einfallende Welle trifft zunächst im Punkt A auf die Oberfläche und erzeugt dort eine Elementarwelle, welche sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet. Nach einer Zeitspanne t hat auch der Punkt B der Wellenfläche im Punkt C die Materialoberfläche erreicht. Innerhalb derselben Zeit hat sich die im Punkt A erzeugte Elementarwelle bis zum Punkt D weiterbewegt. Da nun die Strecken \overline{BC} und \overline{AD} jeweils die gleiche Länge $c \cdot t$ haben, sind die rechtwinkligen Dreiecke ABC und ADC kongruent. Damit gilt aber automatisch



$$\theta = \theta'! \quad (\text{Reflexionsgesetz})$$

Bei der Reflexion ist also der Reflexionswinkel θ' gleich dem Einfallswinkel θ .

10.3 Das Brechungsgesetz

Beim Reflexionsgesetz sind wir davon ausgegangen, dass die gesamte einfallende Wellenenergie reflektiert wird. Betrachten wir einmal die Situation, in der eine Lichtwelle auf die Phasengrenze zwischen Luft und Wasser trifft, wie in Abbildung 10.3-1a) dargestellt. Genau wie bei der Reflexion wird an den Punkten der

Wasseroberfläche, an denen die Wellenfront eintrifft, eine Elementarwelle erzeugt. Diese Elementarwellen dringen nun aber auch ins Wasser ein. Was bedeutet das? Zur Diskussion gehen wir davon aus, dass die Lichtgeschwindigkeit in Luft und Wasser verschieden sind. Ebenfalls nehmen wir an, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser kleiner ist als in Luft (was tatsächlich auch zutrifft).

Wenn die Welle im Punkt C auftrifft, so wird dort eine Elementarwelle erzeugt. Der Rest der Wellenfront befindet sich im Punkt B. In der Zeit t soll sich die Wellenfront in der Luft nun bis zum Punkt D weiterbewegen. In der gleichen Zeit hat sich im Wasser die in C erzeugte Elementarwelle bis zum Punkt E bewegt. Wenn wir nun der Einfachheit mal davon ausgehen, dass die Strecke $\overline{BD} = \lambda_1$ ist, so gilt auch $\overline{CE} = \lambda_2$. Für die Strecke \overline{BD} benötigte die Welle in Luft die Zeit $t = \frac{v_1}{BD} = \frac{v_1}{\lambda_1}$

und im Wasser $t = \frac{v_2}{CE} = \frac{v_2}{\lambda_2}$. Durch

Gleichsetzen erhält man $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$. Je grösser

die Wellenlänge, desto grösser ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit!

Betrachten wir nun die Winkel. Im Dreieck BCD gilt $\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{CD}$ und im Dreieck CDE

$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{CD}$. Teilt man die erste durch die zweite Gleichung bekommt man

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2 \cdot c}{n_1 \cdot c} = \frac{n_2}{n_1},$$

wobei man für das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Medium zur Vakuumlichtgeschwindigkeit den *Brechungsindex* $n = \frac{c}{v}$ definiert hat. Umgeschrieben erhält man den von Snellius in seinem Brechungsgesetz beschriebenen Zusammenhang



$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2.$$

(Snellius'sches Brechungsgesetz)

Wie in c) dargestellt misst man den Einfallswinkel θ_1 und den Brechungswinkel θ_2 jeweils zum Lot.

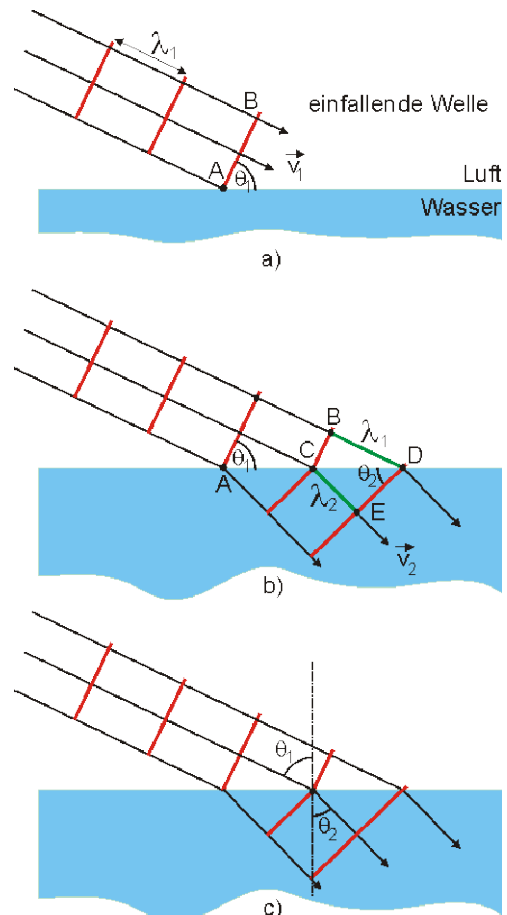


Abbildung 10.3-1



Abbildung 10.3-2 Willebrord van Roijen Snell (1580 - 1626)

Eigentlich sind sowohl das Reflexions- wie auch das Brechungsgesetz eine Folge des Fermatschen Prinzips – demzufolge nimmt das Licht denjenigen Weg, für den es die geringste Zeitspanne benötigt.

Vergleicht man zwei Medien miteinander, so nennt man das Medium mit dem grösseren Brechungsindex als optisch dichter, dasjenige mit dem kleineren Brechungsindex als optisch dünner. In der folgenden Tabelle finden Sie eine Auswahl verschiedener Brechungsindices².

| Material | Brechzahl n bei 589nm | Material | Brechzahl n bei 589nm |
|----------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| Vakuum | 1 | Quarzglas | 1.46 |
| Luft | 1,000292 | Glas | 1.45 – 2.14 |
| Wasser | 1.33 | Bleikristall | bis 1.93 |
| Ethanol | 1.3614 | Zirkon | 1.92 |
| Eis | 1.31 | Diamant | 2.42 |

10.3.1 Genauere Betrachtung des Brechungsindex

10.3.1.1 Dispersion

Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass der Brechungsindex eines Materials (auch Brechzahl genannt) von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Trifft Licht, welches aus verschiedenen Wellenlänge zusammengesetzt ist auf eine Grenzfläche, so wird jede Wellenlänge unter einem anderen Winkel gebrochen.

Dieser wellenlängenabhängigen Aufspaltung sagt man *chromatische Dispersion*. In der nebenstehenden Abbildung ist der Brechungsindex von Quarzglas als Funktion der Wellenlänge in Nanometern dargestellt. Der dargestellte Trend, nämlich eine Abnahme des Brechungsindex zu grösseren Wellenlängen hin, ist allgemein gültig.

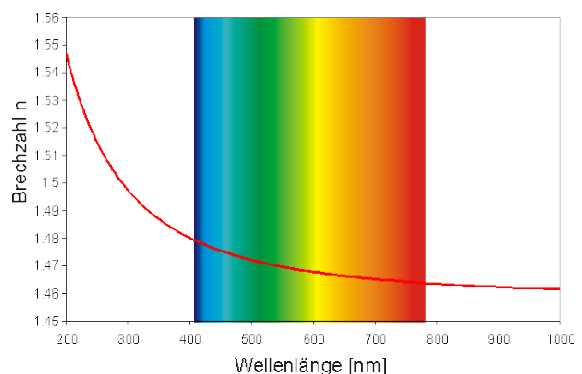


Abbildung 10.3-3 Brechungsindex von Quarzglas. Berechnet mit der Cauchy-Formel

$$n(\lambda) \approx A + \frac{B}{\lambda^2}$$

und den Parametern für Quarzglas $A = 1.4580$ bzw. $B = 0.00354 \mu\text{m}^2$.

Eine wichtige Information gewinnt man, wenn Sonnenlicht auf ein Prisma fokussiert wird. Beim Durchgang durch das Prisma wird das Sonnenlicht in ein wunderbares farbiges Band aufgefächert. Dabei erfährt das rote Licht die geringste, das violette Licht die stärkste Ablenkung. Dazwischen erhält man alle Regenbogenfarben. Man sieht das Spektrum des sichtbaren Lichts. Fokussiert man das Licht des gesamten Spektrums wieder auf einen Punkt, so liegt wieder weisses Licht vor. Erklärbar ist das Resultat dieses Experiments mit der Annahme, dass weisses Licht aus einer bestimmten Mischung von Licht mit verschiedenen Spektralfarben besteht, zu welchen jeweils eindeutig eine Brechzahl des Prismenmaterials gehört. Das ist aber

² Eine grössere Übersicht ist unter <http://refractiveindex.info> zu finden.

gleichbedeutend mit der Aussage, dass zu jeder Spektralfarbe eine ganz bestimmte Wellenlänge gehört³.

10.3.2 Beispiele zum Brechungsgesetz

10.3.2.1 Regenbogen

In der Natur kann man die Aufspaltung des weissen Sonnenlichts in seine Spektralfarben sehr schön am Beispiel des Regenbogens sehen.

In der Abbildung 10.3-4 kann man zwei Regenbogen erkennen. Das ist nicht etwa ein Trugbild, sondern real. Beim inneren Regenbogen handelt es sich um den Hauptregenbogen, beim äusseren um den Nebenregenbogen. Doch wie kommt ein Regenbogen zustande, warum sind es zwei und warum ist die Farbabfolge beim Nebenregenbogen umgekehrt im Vergleich zum Hauptregenbogen?

Den klassischen Erklärungsversuch hat René Descartes geliefert. Betrachten wir dazu die schematische Darstellung in Abbildung 10.3-6. Ein Sonnenstrahl fällt von links parallel zur Horizontalen auf einen Regentropfen. Beim Eintritt in den Tropfen wird der Sonnenstrahl gebrochen. Da Sonnenlicht aus verschiedenen Spektralfarben aufgebaut ist, werden die unterschiedlichen Wellenlängen im Wassertropfen in unterschiedlichem Masse gebrochen: blau am stärksten, rot am wenigsten. An der Rückseite des Regentropfens wird das Licht reflektiert, um beim Austritt aus dem Tropfen nochmals gebrochen zu werden. Zwischen einfallendem Sonnenstrahl und den austretenden Spektralstrahlen ist ein Winkel von 42° vorhanden. Da die Spektralstrahlen beim Austritt aufgrund unterschiedlicher Brechung auseinanderlaufen, gelangt von höher liegenden Wassertöpfchen das rote Licht in unser Auge und von tiefer liegenden Wassertöpfchen das blaue Licht, wie in Abbildung 10.3-5 gezeigt ist. Der Hauptregenbogen ist also aussen rot und innen blau. Der Nebenregenbogen entsteht durch Sonnenlicht, das zweimal im Regentropfen reflektiert wird. Der Winkel zwischen einfallendem Sonnenlicht und austretendem Licht beträgt in diesem Fall 51° - der Nebenregenbogen liegt also weiter aussen. Ausserdem kehrt sich durch die zweimalige Reflexion der Farbverlauf um: rot liegt innen und blau aussen.



Abbildung 10.3-4 Haupt- und Nebenregenbogen. Man beachte die umgekehrte Farbreihenfolge.

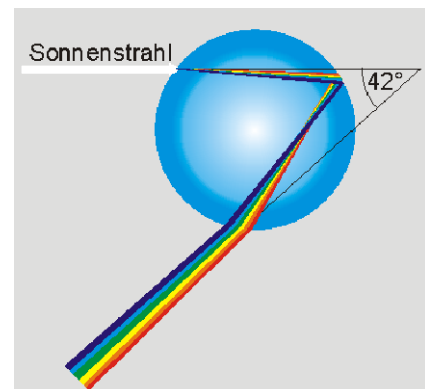


Abbildung 10.3-6

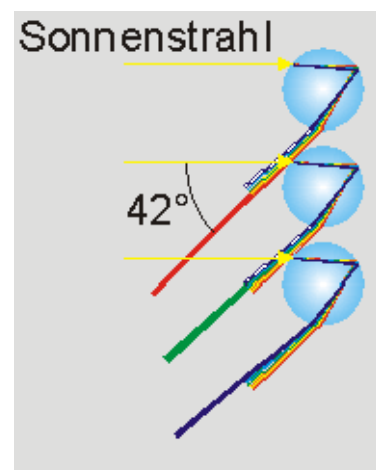


Abbildung 10.3-5

³ Der Umkehrschluss ist nicht zulässig. Nicht jeder Farbe kann eine Wellenlänge zugeordnet werden!

10.3.2.2 Die Totalreflexion

Ein weiterer Effekt zeigt sich, wenn ein Lichtstrahl aus einem optisch dichteren Medium auf die Grenze zu einem optisch dünneren Medium trifft. Gemäss dem Snellius'schen Brechungsgesetz wird in dieser Richtung der Strahl vom Lot weggebogen, für diesen Fall $n_1 > n_2$ gilt

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \theta_1$$

Diese Situation ist in der Abbildung 10.3-7 mit den Strahlengängen a bis c dargestellt. Aus der Mathematik weiss man aber, dass der Sinus eines Winkels nicht grösser als eins werden kann; der Brechungswinkel θ_2 kann nicht grösser als 90° werden! In diesem Fall läuft der gebrochene Strahl gerade entlang der Phasengrenze (d). Der dazugehörige Einfallswinkel wird Grenzwinkel θ_g genannt und kann nach

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1}$$

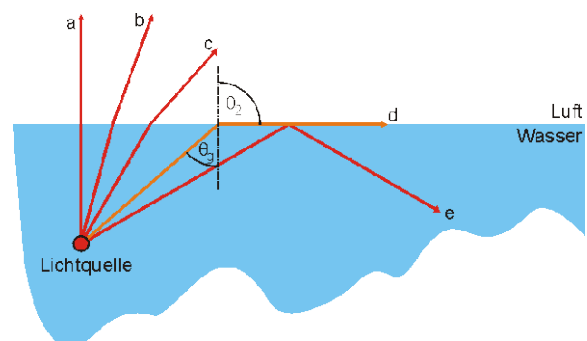


Abbildung 10.3-7

berechnet werden. Für die Phasengrenze Wasser – Luft erhält man zum Beispiel einen Grenzwinkel von 48.8° . Wird der Winkel noch grösser als der Grenzwinkel, so wird der Lichtstrahl vollständig ins optisch dichtere Medium reflektiert – man sagt, er wird *totalreflektiert*. Zu beachten ist, dass die Totalreflexion nur beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium auftreten kann.

Die Totalreflexion macht man sich zum Beispiel bei Glasfasern zu Nutze. Ein in eine Glasfaser eingestrahler Lichtstrahl wird an deren Wänden (Phasengrenze Glas – Luft) jeweils totalreflektiert – er kann nicht mehr entweichen. Auf diese Art und Weise kann man Informationen mit Licht schnell über grosse Strecken übertragen. Verwendet man Laserlicht, so geschieht diese Übertragung nahezu verlustfrei. Ein weiterer Vorteil der Glasfasern ist ihr geringes Gewicht.

10.3.2.3 Wellenlänge und Brechungsindex

Wir haben Abschnitt [→10.3](#) gesehen, dass sich die Wellenlänge von Licht ändert, wenn sich die Lichtgeschwindigkeit ändert. Die Geschwindigkeit von Licht in einem Medium hängt vom Brechungsindex dieses Mediums ab. Dann muss aber auch die Wellenlänge mit dem Brechungsindex zusammenhängen. Wir bezeichnen mit λ die Wellenlänge von monochromatischem Licht im Vakuum. Das Licht breitet sich mit der Geschwindigkeit c aus. Dieses Licht dringt in ein Medium mit der Brechzahl n

ein. Dann gilt $\frac{\lambda}{\lambda_n} = \frac{c}{v_n}$ oder für die Wellenlänge des Lichts im Medium



$$\lambda_n = \lambda \cdot \frac{v_n}{c} = \frac{\lambda}{n}$$

Je grösser der Brechungsindex eines Mediums ist, umso kleiner ist die Wellenlänge des Lichts in diesem Medium, verglichen mit der Wellenlänge im Vakuum.

Es stellt sich nun die Frage, ob etwas ähnliches auch für die Frequenz gilt. Nennen wir die Frequenz von Licht in einem Medium f_n , dann gilt wegen $c = \lambda \cdot f$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{c/n}{\lambda/n} = \frac{c}{\lambda} = f$$

Obwohl sich Geschwindigkeit und Wellenlänge von Licht in einem Medium gegenüber den Werten im Vakuum verschieben, ist die Frequenz nicht davon betroffen!⁴

10.4 Beugung

Wir haben den Begriff der Beugung bereits im Kapitel über mechanische Wellen kennen gelernt. Von Beugung spricht man, wenn sich eine Welle beim Durchgang durch ein Hindernis in den eigenen Schattenraum ausbreitet. In der geometrischen Optik – und auch in diesem Kapitel – wird der Begriff des Lichtstrahls gebraucht. Wie aber könnte man einen Lichtstrahl experimentell herstellen? Man könnte dem Licht eine Schlitzblende in den Weg stellen. Dann hätte man die Möglichkeit, mit der Schlitzbreite die Breite des Lichtstrahls einzustellen. Macht man das, so bekommt man auf dem Schirm Bilder, wie sie in der Abbildung 10.4-2 schematisch dargestellt sind. Von oben nach unten wurde der Spalt der Blende immer kleiner gemacht – der Lichtstrahl hingegen weitet sich hinter der Blende immer mehr auf. Ausserdem wechseln sich helle und dunkle Streifen ab. Mit dem Strahlenmodell kann man dies sicher nicht mehr erklären – der Lichtstrahl wird beim Durchgang durch die Blende gebeugt und dringt in seinen eigenen Schattenraum ein.



Abbildung 10.4-1
Beugung einer von rechts auf ein Hindernis laufenden Wasserwelle.

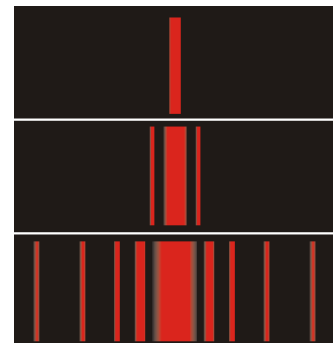


Abbildung 10.4-2

⁴ Dies gilt für normale optische Anwendungen. Bei sehr hohen Intensitäten (Laser) ändert sich auch die Frequenz des Lichts an der Phasengrenze.

10.4.1 Beugung am Doppelspalt

Thomas Young führte 1802 sein berühmtes Doppelspaltexperiment durch. Das Prinzip ist in Abbildung 10.4-4 dargestellt.

Eine ebene Welle fällt von links auf eine Blende a und erzeugt am Spalt S_1 eine Elementarwelle, welche sich kreisförmig ausbreitet, bis sie schliesslich auf die Blende b trifft. Dort werden bei den Spalte S_2 und S_3 wiederum Elementarwellen erzeugt (keine Phasenverschiebung!), welche miteinander interferieren und auf dem Schirm c ein Interferenzmuster erzeugen. Man erkennt abwechselnd helle und dunkle Streifen; Maxima und Minima. Die Maxima entstehen durch konstruktive Interferenz der beiden Elementarwellen, die Minima durch destruktive Interferenz. Da die Interferenzmuster nur mit Hilfe von Wellen erklärbar sind, hatte Young damit zeigen können, dass sich Licht als Welle ausbreitet und nicht, wie damals noch angenommen, als Teilchen.



Thomas Young

Abbildung 10.4-3 Thomas Young (1773 - 1829).
Quelle: Wikipedia

Jetzt stellt sich noch die Frage, wo auf dem Schirm die einzelnen Maxima und Minima zu liegen kommen. Dazu nehmen wir an, dass der Abstand von der Blende b zum Schirm c sehr gross ist. Auf die nebenstehende Abbildung bezogen soll also $a \ll g$ gelten. Nun betrachtet man zwei Elementarwellen, welche zu einem Zeitpunkt in S_2 und S_3 erzeugt werden. Die beiden Wellen weisen einen Wegunterschied von Δs auf, der vom Betrachtungswinkel α abhängt. Wie in der Abbildung 10.4-5 gezeigt ist. Für den Wegunterschied gilt $\Delta s = g \cdot \sin \alpha$. Auf dem Schirm

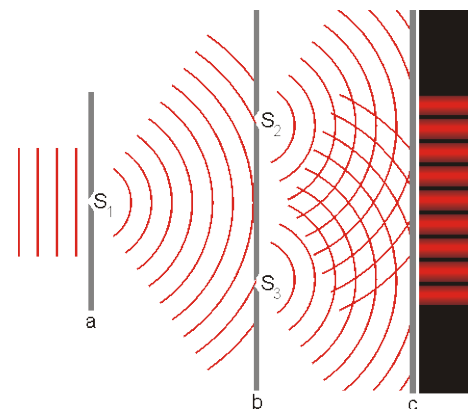
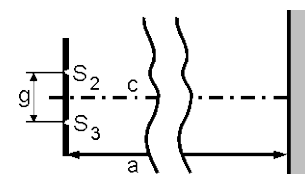


Abbildung 10.4-4

kommt es nur dann zu einer konstruktiven Interferenz, wenn der Wegunterschied ein ganzzahliges Vielfaches einer ganzen Wellenlänge ist, also $\Delta s = n \cdot \lambda$ gilt. Durch die Kombination der beiden Bedingungen bekommt man für den Sinus des Winkels, unter dem die einzelnen Maxima erscheinen



$$\sin \alpha_{\max} = \frac{n \cdot \lambda}{g} \leq 1 \text{ mit } n=0,1,2,\dots$$

Entsprechend der Zahl n nummeriert man dann die Maxima auch: "Maximum 3. Ordnung" etc.

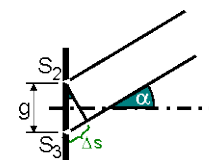


Abbildung 10.4-5

Beträgt der Wegunterschied Δs genau eine halbe Wellenlänge, so interferieren die beiden Wellen destruktiv; es kommt zu einer Auslöschung und auf dem Schirm entsteht an entsprechender Stelle eine dunkle Stelle. Der Sinus des Winkels, unter dem destruktive Interferenz auftritt, berechnet sich nach



$$\sin \alpha_{\min} = \frac{(n - \frac{1}{2}) \cdot \lambda}{g} \leq 1, \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wieder bezeichnet man entsprechend der Zahl n die Minima.

10.4.2 Beugung am Gitter

Der Nachteil der Beugung am Doppelspalt ist die geringe Intensität der einzelnen Maxima, welche auch nicht so gut voneinander getrennt sind. Verkleinert man den Spaltabstand g , so wird $\sin \alpha$ und somit α selber grösser. Die Intensität kann man erhöhen, wenn man statt der zwei Elementarwellen des Doppelspaltes sehr viele Elementarwellen überlagern lässt. Diese erzeugt man, indem man ein *Strichgitter* verwendet, welches sehr viele Spalte aufweist, welche sehr nahe nebeneinander angeordnet sind. Schematisch sieht die Lage dann so aus, wie sie in Abbildung 10.4-6 dargestellt ist. Die Wellen aus jeder Spalte interferieren miteinander. Beträgt der Wegunterschied der Wellen benachbarter Spalte ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge, so kommt es auf dem entfernten Schirm zu einer konstruktiven Überlagerung der Wellen – einem Maximum. Aus der Abbildung 10.4-6 kann man leicht entnehmen, dass für die Lage der Maxima und Minima dieselben Formeln gelten, wie für den Doppelspalt – nur dass die Beugungsmaxima besser voneinander getrennt und auch intensiver sind.

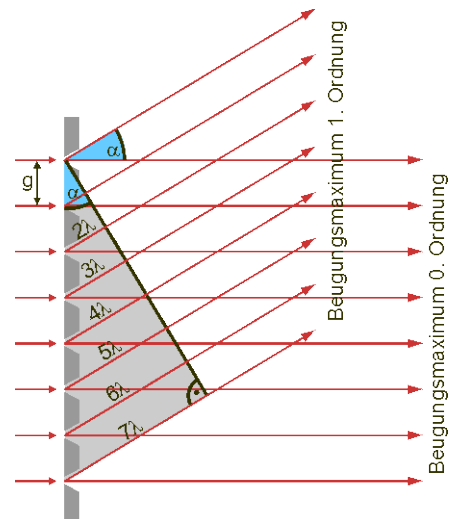


Abbildung 10.4-6

Wie effizient Gitter arbeiten, kann man leicht am Beispiel einer CD sehen. Bei einer CD sind kleine Rillen ganz nahe beieinander angeordnet und weisses Licht durch Beugung in Reflexion in seine Spektralfarben.

10.4.3 Beugung am Einfachspalt

Bisher wurde argumentiert, dass an einer Spalte genau eine Elementarwelle erzeugt wird, welche mit einer Elementarwelle aus einer benachbarten Spalte interferiert. Das kann aber nicht stimmen, weil beim Durchgang von Licht durch einen Spalt ebenfalls ein Beugungsmuster auf dem Schirm entsteht, wie man der nebenstehenden Abbildung entnehmen kann.

Zur Erklärung betrachten wir die Abbildung 10.4-8, in der der Sachverhalt schematisch dargestellt wird. Von links läuft eine ebene Welle auf den Spalt mit der Breite d zu. Es sind verschiedenen Wellennormalen eingezeichnet (von denen gibt es eigentlich unendlich viele). Beim Durchgang durch den Spalt erzeugt die eintreffende Welle eine Elementarwelle an den markierten Orten (es werden eigentlich unendlich viele Elementarwellen erzeugt). Diese Elementarwellen überlagern sich wieder,

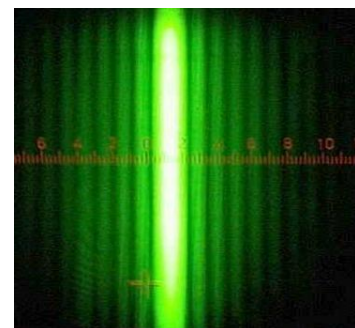


Abbildung 10.4-7 Beugung einer grünen Lichtquelle am Einfachspalt. Quelle: Oliver Kurmis, Wikipedia.org.

wobei es in bestimmten Richtungen zu konstruktiver Interferenz benachbarter Elementarwellen kommt und in bestimmten Richtungen zu destruktiver Interferenz. Das Hauptmaximum ist schnell gefunden: es liegt in weiterlaufender Richtung der einfallenden Welle, wobei das Maximum der Intensität in der Mitte liegt. Wo liegt jetzt das erste Minimum? Dazu betrachten wir die Abbildung 10.4-8 genauer. Unter dem gegebenen Betrachtungswinkel θ sollen die Elementarwellen, welche in den Punkten A und E erzeugt werden, genau eine Wellenlänge phasenverschoben sein. Dann ist aber die Elementarwelle, welche im Punkt C erzeugt wird zur Welle von A genau eine halbe Wellenlänge phasenverschoben – die Wellen von A und C löschen sich gegenseitig aus. Genauso wird es sich aus Symmetriegründen bei den Wellen von B und D verhalten; auch die löschen sich gegenseitig aus. Wenn man die Sache gedanklich auf unendlich viele Elementarwellen ausdehnt, so wird es bei der beschriebenen Situation zu jeder Elementarwelle zwischen den Punkten A und C eine Elementarwelle zwischen den Punkten C und E geben, welche zu dieser genau eine halbe Wellenlänge phasenverschoben ist. Entsprechend wird auf dem Schirm keine Intensität mehr zu beobachten sein. Für die Lage von Minima am Einfachspalt ergibt sich also

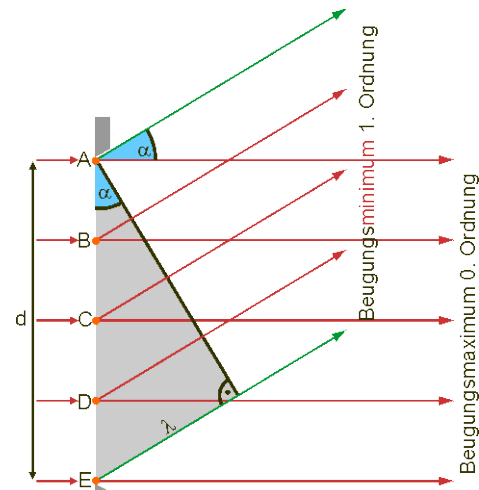


Abbildung 10.4-8



$$\sin \alpha_{\min} = \frac{m \cdot \lambda}{d} \leq 1, \text{ mit } m=1, 2, 3, \dots$$

Mit einer analogen Diskussion, bei der die Wellen der "einhüllenden" (grünen Wellennormalen) Elementarwellen einen Phasenunterschied von einem ungeradzahligem Vielfachen einer halben Wellenlänge aufweisen, bekommt man für die Lage der Maxima beim Einfachspalt



$$\sin \alpha_{\max} = \frac{(m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda}{d} \leq 1, \text{ mit } m=1, 2, 3, \dots$$

10.4.4 Intensitätsverlauf der Interferenzstreifen

Die bisherigen Betrachtungen waren nur auf die Lage der einzelnen Beugungsmaxima und Minima ausgerichtet. Tatsächlich haben aber nicht alle Maxima die gleiche Intensität. Nun wollen wir die Intensitäten bei Beugungsvorgängen genauer betrachten.

Da man Licht offensichtlich als Welle betrachten kann, werden wir für die weiteren Rechnung eine Lichtwelle in der Form

$$E = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

schreiben, ohne darauf einzugehen, worum es sich bei der Amplitude E_0^5 handelt.

10.4.4.1 Intensitätsverlauf am Doppelspalt

Beim Doppelspalt laufen Wellen durch zwei Spalte S_1 und S_2 , welche in Phase sind. Am Punkt P hingegen sollen die beiden Wellen die Phasendifferenz θ aufweisen (Abbildung 10.4-9a)). Wir schreiben also für die beiden Wellen aus S_1 und S_2

$$E_1 = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta).$$

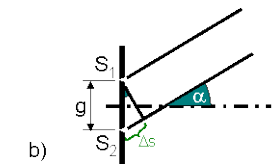
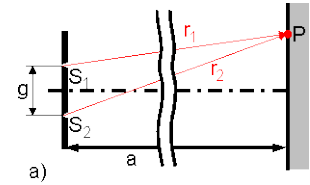


Abbildung 10.4-9

Graphisch lassen sich die beiden Formeln zu einem bestimmten Zeitpunkt wie in Abbildung 10.4-10 gezeigt darstellen. Um nun die Amplitude der resultierenden Welle im Punkt P zu berechnen, muss man die beiden Zeiger in Abbildung 10.4-10 vektoriell addieren. Graphisch sieht man das Resultat in Abbildung 10.4-11. Für E gilt

$$E = 2 \cdot (E_0 \cdot \cos \gamma) = 2E_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right).$$

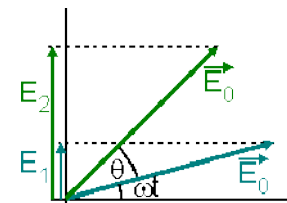


Abbildung 10.4-10

Die Intensität einer elektromagnetischen Welle ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude. Quadriert man also obige Gleichung, so bekommt man für die Intensität der resultierenden Welle an einem beliebigen Punkt P

$$I = E^2 = 4 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) = 4I_0 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right).$$

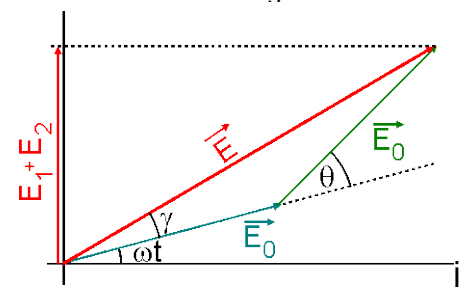


Abbildung 10.4-11

Abbildung 10.4-12 zeigt den Intensitätsverlauf als Funktion der Phasendifferenz θ der beiden von S_1 und S_2 ausgehenden Wellen beim Auftreffen auf den Schirm.

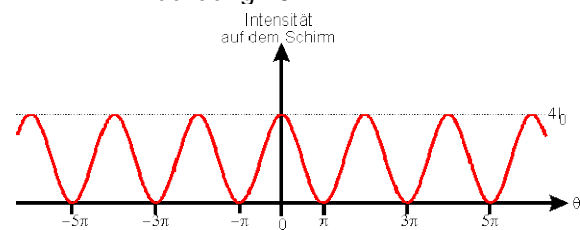


Abbildung 10.4-12

Nun interessiert noch der Zusammenhang zwischen der Phasendifferenz θ und dem Winkel α , unter dem wir die jeweilige Intensität auf dem Schirm beobachten (Abbildung 10.4-9b)). Ein Gangunterschied von $\Delta s = \frac{1}{2}\lambda$ bedeutet eine Phasendifferenz von $\theta = \pi$, ein Gangunterschied von $\Delta s = \lambda$ eine Phasendifferenz von $\theta = 2\pi$. Das lässt allgemein den Schluss zu, dass zwischen der Phasendifferenz und dem Gangunterschied die Beziehung

⁵ Tatsächlich handelt es sich um den elektrischen Feldvektor der elektromagnetischen Welle.

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta s = \frac{2\pi g}{\lambda} \cdot \sin \alpha$$

gilt.

Beim der Verwendung eines Gitters werden die einzelnen Maxima intensiver (weil schmaler werdend), verändern aber ihre Position nicht.

Interessanterweise beobachtet man in der Realität einen Intensitätsverlauf beim Doppelspalt, wie er in Abbildung 10.4-13 rot dargestellt ist und nicht eine gleichbleibende Intensität aller Maxima, wie die Abbildung 10.4-12 vermuten lässt. Dabei stellt man fest, dass der Spaltabstand g und die Spaltbreite d eine Rolle spielen. Was passiert da genau? Nun, ein Doppelspalt besteht aus zwei einzelnen Spalte – und jeder Spalt für sich besitzt auch ein Beugungsmuster. Für den Intensitätsverlauf der Beugung am Spalt gilt (ohne Beweis)

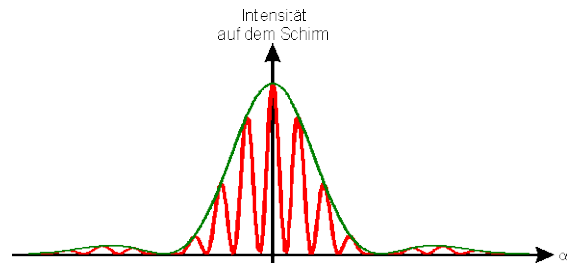


Abbildung 10.4-13 Intensitätsverlauf bei der Beugung am Doppelspalt.



$$I_{\text{Einfachspalt}} = 4 \cdot I_0 \cdot \left(\frac{\sin^2 \frac{1}{2} \delta}{\frac{1}{2} \delta} \right)^2, \text{ mit } \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \cdot \sin \alpha.$$

Zur Erinnerung: d ist die Spaltbreite (s. Abbildung 10.4-8). Man wird also unter dem Winkel α keine Intensität beim Doppelspalt beobachten können, wenn der Einzelspalt bei diesem Winkel ein Minimum aufweist. Man sagt auch, der Intensitätsverlauf beim Doppelspalt wird mit dem Intensitätsverlauf des Einzelspaltes moduliert. Dasselbe gilt natürlich auch für den Intensitätsverlauf beim Gitter.

10.4.5 Beugung an einer kreisrunden Öffnung – Auflösungsvermögen

Immer dann, wenn Licht durch eine enge Öffnung fällt, tritt Beugung auf. Bei einem Spalt tritt das erste Minimum bei einem Winkel von $\alpha \approx \sin \alpha = \frac{\lambda}{d}$ auf, wobei d die Spaltbreite ist. Die Beziehung gilt, solange der Winkel α klein ist. Das Beugungsbild eines kreisrunden Loches ist in Abbildung 10.4-14 gezeigt. Für den Winkel, unter dem das erste Minimum auftritt gilt (ohne Beweis)

$$\alpha \approx \sin \alpha = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d}$$

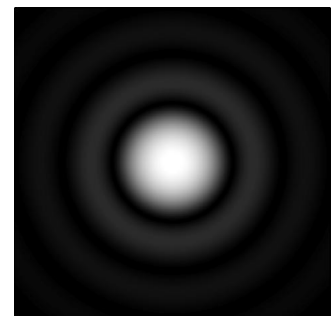


Abbildung 10.4-14 Beugungsbild einer kreisrunden Öffnung. Quelle: Wikipedia

für kleine Winkel α . Diese Formel hat in der Praxis enorme Bedeutung. Ein Beugungsbild wie in Abbildung 10.4-14 gezeigt entsteht zum Beispiel dadurch, dass Licht (von einem entfernten Stern) durch eine Linse fällt, welche von einer Blende eingefasst ist. Eigentlich würde man vom Standpunkt der geometrischen Optik aus

einen hellen Punkt erwarten. Da aber das Licht an der Blende des optischen Instruments gebeugt wird, hat dies weitreichende Konsequenzen für das Auflösungsvermögen dieser Instrumente zur Folge: zwei punktförmige Lichtquellen können nur dann getrennt voneinander wahrgenommen werden, wenn diese einen minimalen Abstand voneinander haben. Dabei hat man sich darauf geeinigt, dass zwei Lichtquellen getrennt voneinander sind, wenn das Maximum der einen Lichtquelle mindestens mit dem Minimum der anderen Lichtquelle zusammenfällt. Abbildung 10.4-15 verdeutlicht diesen Zusammenhang. In a) sind die Beugungsscheibchen zweier Sterne, wie sie durch eine Sammellinse eines Fernrohrs erzeugt worden sind, so nahe beieinander, dass man die beiden Sterne nicht voneinander unterscheiden kann. In b) fällt das Maximum des Beugungsscheibchens des einen Sterns mit dem Minimum des Beugungsscheibchens des anderen Sterns zusammen. In c) schliesslich sind zwei leuchtende Objekte vollständig aufgelöst.

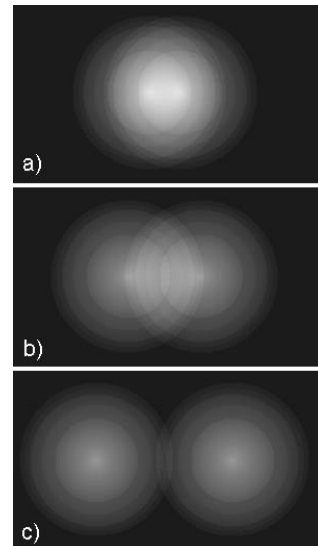


Abbildung 10.4-15
Schematische Abbildungen zweier Punktquellen (Sterne) erzeugt von einer Sammellinse.

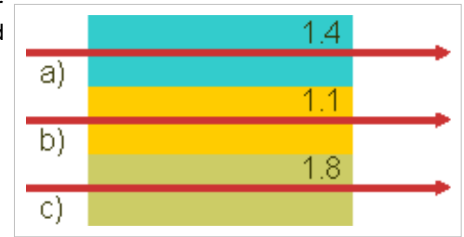


Damit zwei Objekte von einer Linse getrennt abgebildet werden können, müssen diese von der Linse aus gesehen mindestens unter einem Sehwinkel von $\alpha = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d}$ erscheinen.

Die nachfolgende Aufgabensammlung ist ein Auszug aus der Datenbank unter www.physica.ch. Zu jeder Aufgabe können die numerischen Resultate, wo möglich, im Anhang nachgesehen werden. Falls Sie genauere Lösungen benötigen, können Sie auf der obigen Homepage die hinter der Aufgabe angegebene Nummer ins Suchfeld eingeben und erhalten so noch genauere Lösungshinweise. Sollte bei einer Aufgabe keine Lösung angeboten werden, so benutzen Sie bitte das ebenfalls vorhandene Forum, um Ihre Frage loszuwerden.

1)[513]In der folgenden Abbildung ist schematisch dargestellt, wie drei Lichtpulse mit gleicher Wellenlänge durch drei verschiedene Materialien geschickt werden. Die Brechungsindizes sind jeweils angegeben.

- Welches Material wird vom Lichtpuls am schnellsten durchlaufen?
- In welchem Material wird die Wellenlänge des Lichtpulses am grössten sein?
- In welchem Material ist die Frequenz am kleinsten?

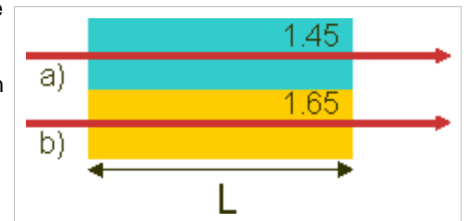


2)[512]Zur Farbaufspaltung:

- Was ist der physikalische Grund dafür, dass weisses Licht mit einem Prisma in seine Spektralfarben zerlegt werden kann.
- Welches Prismenmaterial würde das weisse Licht - unter ansonsten gleichen Laborbedingungen - besser aufspalten: Quarzglas oder Kronglas ($A=1.5220$, $B=0.00459 \mu\text{m}^2$)? Benutzen Sie zur Beantwortung die Cauchy - Gleichung.

3)[522]Angenommen, die Lichtwellen in der folgenden Abbildung haben beide eine Wellenlänge von 620nm und schwingen anfänglich gegenphasig.

- Wie gross muss L mindestens sein, damit die beiden Wellen die Schichten exakt in Phase verlassen?
- Geben Sie den nächstgrösseren Wert von L an, der dies ermöglicht!



4)[520]Taucht man ein leeres Proberöhrchen in Wasser, so kann man bei bestimmter Stellung des Glases nicht hindurchsehen. Das Glas erscheint silberglänzend. Erst wenn man Wasser einfüllt, kann man wieder hindurchsehen.

Wie ist das zu erklären

5)[523]Zwei leuchtende dünne Drähte werden in sehr geringer Entfernung parallel zueinander angebracht.

Kann man Interferenzerscheinungen beobachten? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

6)[351]Ein Doppelspalt (Abstand der Spalte $a = 0.2 \text{ mm}$) wird mit einem kollimierten Laserstrahl beleuchtet. Auf einem Schirm in 8.5 m Entfernung wird das Fraunhofer Beugungsbild aufgefangen. Der Abstand zwischen dem Maximum der 0. und der 4. Ordnung misst 18.1 cm .

- Welche Wellenlänge hat der Laser?
- Welcher Farbe entspricht das?

7)[352]Mit Hilfe einer Na-Lichtquelle ($\lambda = 590\text{nm}$) und eines Doppelspaltes werden auf einem Schirm im Abstand von $b = 3.39\text{m}$ Interferenzstreifen erzeugt. Für helle Streifen wird der Streifenabstand $\Delta d = 2.00\text{mm}$ gemessen.

Wie gross ist der Abstand a der beiden Spalten des Doppelspaltes?

8)[514]Auf ein optisches Gitter mit der Gitterkonstante $4.00 \cdot 10^{-6}\text{m}$ fällt Licht der Wellenlänge 694 nm senkrecht ein. Das Interferenzbild wird auf einem $e = 2.00 \text{ m}$ entfernten ebenen Schirm beobachtet, der parallel zum Gitter steht.

- Berechnen Sie den Abstand der auf dem Schirm sichtbaren Helligkeitsmaxima 1. Ordnung voneinander.
- Bis zur wievielten Ordnung können theoretisch Helligkeitsmaxima auftreten?
- Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Spektren 2. und 3. Ordnung einander überlappen, wenn sichtbares Licht aus dem Wellenlängenintervall $400\text{nm} \leq \lambda \leq 750\text{nm}$ benutzt wird!

9)[515]Die gelbe Quecksilberlinie mit einer Wellenlänge von 578.0 nm fällt in der 3. Ordnung fast genau mit der blauen Linie des Quecksilbers in der 4. Ordnung zusammen.

Berechnen Sie daraus die Wellenlänge der blauen Linie.

10)[516] 2.00 m vor einem optischen Gitter mit 5000 Strichen pro cm ist ein 3.20 m breiter Schirm so aufgestellt, dass das Maximum 0. Ordnung in seine Mitte fällt. Das Gitter wird mit parallelem weißem Glühlicht senkrecht beleuchtet.

Welche Wellenlänge hat das Licht, das am Rand des Schirms gerade noch zu sehen ist?

11)[517]Senkrecht auf ein optisches Gitter mit 200 Strichen pro mm fällt weißes Licht ($400\text{nm} \leq \lambda \leq 800\text{nm}$). Vor das Gitter bringt man einen Filter, der laut Angabe der Lieferfirma nur Licht der Wellenlänge $\lambda > 600 \text{ nm}$ durchlassen soll.

Stimmt diese Angabe, wenn man auf einem Schirm in 0.94 m Entfernung den Abstand der beiden Innenränder der Maxima 1. Ordnung zu 230 mm misst?

12)[521]Der Planet Neptun ist etwa 5 Mrd Kilometer von uns entfernt und hat einen Durchmesser von etwa 50000km .

Welchen Objektivdurchmesser muss ein Fernrohr mindestens haben, damit Neptun bei $\lambda = 500\text{nm}$ noch als Scheibchen gesehen werden kann?

Lösungen:

1)

- a) In Material b) besitzt das Licht die grösste Geschwindigkeit, weil aus der Definition des Brechungsindex $n = \frac{c}{v}$ folgt, dass dieser kleiner wird, wenn die Geschwindigkeit grösser wird.
- b) Für die Wellenlänge in einem Material gilt $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$. Somit wird das Licht im Material mit dem kleinsten Brechungsindex die grösste Wellenlänge haben. Die Antwort b) ist richtig.
- c) Die Frequenz ändert sich beim Durchgang durch ein Material nicht - sie ist also bei allen Materialien gleich gross.

2)

- a) Die Dispersion ist Ausdruck der Tatsache, dass der Brechungsindex n eines Materials von der Wellenlänge des einfallenden Lichts abhängt. Deshalb wird jede Wellenlänge des weissen Lichtes beim Durchgang durch ein Prisma unterschiedlich stark gebrochen - es kommt zu einer Aufspaltung des weissen Lichts.
- b) Weisses Licht umfasst etwa den Wellenlängenbereich von 400 bis 800 nm. Bei 400 nm berechnet man mit der Cauchy - Gleichung für Quarzglas einen Brechungsindex von 1.5465 und für Kronglas 1.6368. Bei 800nm beträgt der Brechungsindex bei Quarzglas 1.4635 und für Kronglas 1.5292. Rechnet man ein Beispiel durch, so stellt man fest, dass Kronglas das Licht besser aufspaltet.

3)

- a) Wir berechnen zunächst allgemein, wie viele Wellenzüge auf der Länge L in Abhängigkeit von λ Platz haben. Mit λ_{n_1} bezeichnen wir die Wellenlänge im Medium, mit λ die Wellenlänge des Lichtes in Vakuum. Auf der Länge L haben somit $N = \frac{L}{\lambda_{n_1}} = \frac{L \cdot n}{\lambda}$ Wellenzüge Platz, wobei man von der Relation $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ Gebrauch gemacht hat. In den beiden Medien haben also $N_1 = \frac{L \cdot n_1}{\lambda}$ respektive $N_2 = \frac{L \cdot n_2}{\lambda}$ Wellenzüge Platz. Uns interessiert die Differenz, welche sich nach $N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda} \cdot (n_2 - n_1)$ berechnet. Dabei muss $n_2 > n_1$ sein. Jetzt zum Problem: die beiden Wellen schwingen gegenphasig. Dementsprechend muss die Differenz der Wellenzüge, erzeugt durch den Durchgang der Wellen durch die Medien, genau $\frac{1}{2}$ betragen. Dann beträgt der Phasenshift total 2π und die Wellen sind in Phase. Also:

$$L = \frac{(N_2 - N_1) \cdot \lambda}{n_2 - n_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 620 \cdot 10^{-9} m}{0.2} = 2 \cdot 10^{-6} m.$$

- b) Hier muss natürlich $N_2 - N_1 = \frac{3}{2}$ sein. Man bekommt dann analog zu a) $L = 5 \cdot 10^{-6} m$.

4)

Das Licht erleidet an der Grenzfläche Glas-Luft eine Totalreflexion. Diese verschwindet, wenn man in das Proberöhrchen Wasser giesst. Hätte das Proberöhrchen den gleichen Brechungsindex wie das Wasser, so wäre es völlig unsichtbar!

5)

Nein, es sind keine Interferenzerscheinungen zu erkennen. Das Licht der beiden Drähte ist nicht kohärent. Da beide Drähte völlig unabhängig voneinander Licht aussenden, sind die Lichtwellenpakete ebenfalls unabhängig voneinander und können keine Interferenzmuster erzeugen.

6)

- a) Aus der Theorie folgt $\lambda = \frac{a \cdot y}{m \cdot L} = 1064 \text{ nm}$.

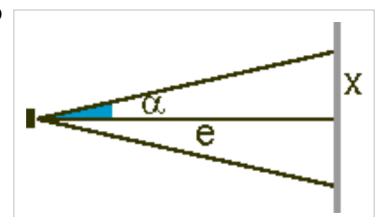
b) Es handelt sich hier um einen Laser im Infraroten (für den Menschen unsichtbaren) Spektralbereich. 1064nm ist die Wellenlänge des Nd:YAG Festkörperlaser.

7)

$$\text{Spaltabstand: } a \cong \frac{\lambda \cdot b}{\Delta d} = 1 \text{ mm}$$

8)

- a) Das 1. Maximum tritt unter den gegebenen Bedingungen unter einem Winkel von $\alpha = \arcsin\left(\frac{\lambda}{g}\right) = \arcsin\left(\frac{694 \cdot 10^{-9} m}{4 \cdot 10^{-6} m}\right) = 9.99^\circ$. Die Strecke x berechnet sich zu $\tan \alpha \cdot e = 0.352 m$. Die beiden Maxima 1. Ordnung liegen also $2 \cdot 0.352 m \approx 0.7 m$ auseinander.



- b) Es muss gelten $\sin \alpha \leq \frac{n \cdot \lambda}{g}$ oder $n \leq \frac{\sin \alpha \cdot g}{\lambda} = \frac{\sin(90^\circ) \cdot 4 \cdot 10^{-6} m}{694 \cdot 10^{-9} m} = 5.76$. Da n nur eine positive ganze Zahl sein darf, folgt $n_{\max} = 5$.

c) Bei einem Gitter werden die kurzen Wellenlänge weniger stark gebeugt als die grossen. Deshalb muss man prüfen, ob der Winkel für das Maximum 2. Ordnung für 750nm grösser ist, als das Maximum 3. Ordnung für 400nm. Dann überlappen sich die Spektren. Es folgt

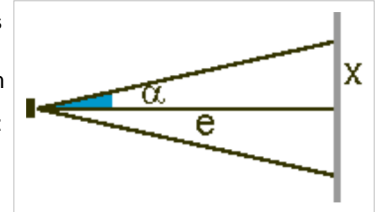
$$\alpha_{400\text{nm}, 3.\text{Ord}} = \arcsin\left(\frac{3 \cdot \lambda}{g}\right) = 17.46^\circ \text{ und } \alpha_{750\text{nm}, 2.\text{Ord}} = \arcsin\left(\frac{2 \cdot \lambda}{g}\right) = 22.02^\circ. \text{ Die beiden Spektren überlagern sich also!}$$

9)

Es gilt für den Winkel, unter dem die Beugungsmaxima erscheinen $\sin\alpha = \frac{n \cdot \lambda}{g}$, wobei n eine positive ganze Zahl sein darf. Da für die betrachteten Linien der Winkel gleich ist, darf man $\frac{n_1 \cdot \lambda_1}{g} = \frac{n_2 \cdot \lambda_2}{g}$. Es folgt $\lambda_1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \lambda_2 = \frac{3}{4} \cdot 578\text{nm} = 433.5\text{nm}$.

10)

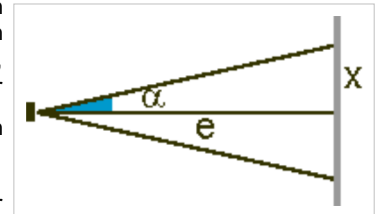
Der grösste Winkel α (s. Abbildung) beträgt $\alpha = \arctan\left(\frac{x}{e}\right) = \arctan\left(\frac{1.6\text{m}}{2\text{m}}\right) = 38.66^\circ$. Da ebenfalls $\sin\alpha = \frac{n \cdot \lambda}{g}$ gilt folgt $n = \frac{\sin\alpha \cdot g}{\lambda} = 3.12$. Dabei haben wir $\lambda = 400 \cdot 10^{-9}\text{m}$ gesetzt. Mit diesem Maximum gehen wir jetzt zurück in die Gleichung, welche wir nach der Wellenlänge auflösen: $\lambda = \frac{\sin\alpha \cdot g}{n} = 416 \cdot 10^{-9}\text{m}$.



11)

Es muß die Wellenlänge berechnet werden, die diese Messwerte liefert und mit der geforderten Wellenlänge verglichen. An den Innenrändern der Maxima liegt das Licht mit der kürzeren Wellenlänge. Der Filter soll nur Licht mit einer größeren Wellenlänge, also rotes Licht, hindurchlassen. Dieses Licht hat sein Interferenzmaximum noch weiter außen. Da der Beugungswinkel α sehr klein ist, gilt $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ oder $\frac{n \cdot \lambda}{g} \approx \frac{x}{e}$. Daraus erhält man

$$\lambda = \frac{x \cdot g}{n \cdot e} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.23\text{m} \cdot \frac{0.001\text{m}}{200}}{1 \cdot 0.94} = 6.12 \cdot 10^{-7}\text{m}, \text{ also } 612\text{nm}. \text{ Ja, der Filter lässt im Rahmen der Messgenauigkeit nur Wellenlängen grösser als } 600\text{nm} \text{ durch.}$$



12)

$$\text{Es gilt } \alpha = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d}. \text{ Daraus folgt } d = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{\alpha} = 1.22 \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9}\text{m}}{\frac{5 \cdot 10^{-4}\text{m}}{5 \cdot 10^9\text{m}}} = 6.1\text{cm}$$