

## 8 Schwingungen

In diesem Kapitel geht es nicht nur um achtbeinige Insektenjäger. Was diese allerdings mit Schwingungen zu tun haben – das werden Sie hier erfahren.



Gartenkreuzspinne bei einer Mahlzeit. Quelle: Wikipedia.

**Inhaltsverzeichnis**

8	Schwingungen.....	1
8.1	Beschreibung von Schwingungen .....	3
8.2	Begriffe rund um Schwingungen .....	3
8.3	Harmonische Schwingungen und ihre Beschreibung.....	3
8.3.1	Das Federpendel als Beispiel einer harmonischen Schwingung .....	4
8.3.2	Die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung .....	5
8.3.3	Die Periodendauer des Federpendels .....	7
8.3.4	Das Fadenpendel .....	7
8.4	Nicht harmonische Schwingungen .....	9
8.5	Energie des harmonischen Oszillators – am Beispiel des Federpendels .....	9
8.6	Gedämpfte Schwingungen .....	10
8.6.1	Schwache Dämpfung.....	11
8.6.2	Aperiodischer Grenzfall und Kriechfall.....	11
8.7	Erzwungene Schwingung und Resonanz.....	11
8.7.1	Resonanz .....	12

## 8.1 Beschreibung von Schwingungen

Schwingungen begegnen uns im Alltag überall: Eine schwingende Unruh hält die Zeiger analoger Armbanduhr am Ticken, Kinder düsen auf Schaukeln hin und her, Sprungbretter wippen auf und ab und selbst Häuser bewegen sich vor und zurück (Abbildung 1). Beim Vorgang von Ebbe und Flut handelt es sich um eine Schwingung, genauso wie beim Auf und Ab eines Bungeejumpers. Atome in Molekülen schwingen um ihre Gleichgewichtspositionen und Elektronen zittern in elektrischen Leitern hin und her (Wechselstrom).

Intuitiv können wir eine Schwingung als solche erkennen. Dem Wissenschaftler reicht Intuition freilich nicht aus. Er oder sie erkennt eine Schwingung daran, dass ein System aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird und anschliessend durch eine rücktreibende Kraft wieder dorthin gezwungen wird.

Im folgenden Abschnitt sind zunächst die wichtigsten Begriffe rund um Schwingungen dargestellt.

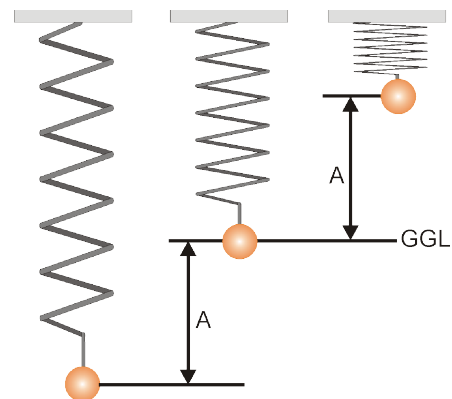


**Abbildung 1** Das Taipei Financial Center (Taipeh 101) in Taiwan ragt mit einer Höhe von 508m in den Himmel. Bei einem Taifun kann seine Spitze bis 1.3m hin und her schwingen! Quelle: Wikipedia

## 8.2 Begriffe rund um Schwingungen

Schwingungsfähige Systeme bezeichnet man allgemein auch als Oszillatoren. Der Bewegungsablauf erfolgt zwischen zwei Umkehrpunkten. Würde das schwingende System zur Ruhe kommen, so würde es das am Gleichgewichts- oder Ruhepunkt (GGL) tun. Die aktuelle Entfernung der schwingenden Masse von ihrer Ruhelage wird als Auslenkung oder Elongation bezeichnet. Die maximale Auslenkung nennt man Amplitude  $A$  oder auch  $\hat{y}$  (sprich y-Dach) genannt. In Abbildung 2 sind diese Begriffe am Beispiel eines schwingenden Federpendels gezeigt.

Für eine vollständige Schwingung (hin und zurück) benötigt das Objekt die Dauer  $T$ . Statt der Schwingungsdauer wird meistens der Kehrwert der Periodendauer angegeben. Diesen nennt man Frequenz, welche die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde angibt. Die Frequenz hat die eigene Einheit Hertz (Hz).



**Abbildung 2** Die maximale Entfernung von der Gleichgewichtslage (GGL) wird als Amplitude  $A$  bezeichnet.

## 8.3 Harmonische Schwingungen und ihre Beschreibung

In einem ersten Beispiel wollen wir die Schwingung eines Federpendels untersuchen. Wir beginnen mit der Analyse der auf die schwingende Masse einwirkenden Kräfte.

### 8.3.1 Das Federpendel als Beispiel einer harmonischen Schwingung

In Abbildung 3 ist ein Federpendel in seiner Ruhelage, am oberen Umkehrpunkt und am unteren Umkehrpunkt zusammen mit den jeweils wirkenden Kräften dargestellt. Nach oben soll die Auslenkung positiv sein.

In der Gleichgewichtslage hebt die nach unten gerichtete Gewichtskraft die nach oben gerichtete Federkraft gerade auf. Die resultierende Kraft auf die Kugel ist somit

$$F_{res} = -F_G + F_0 = \underline{\underline{0}}$$

Wird der Körper um die Strecke  $y > 0$  nach oben ausgelenkt, so verkleinert sich die nach oben wirkende Zugkraft der Feder auf  $F_1 = F_0 - D \cdot y$ . Die Gewichtskraft überwiegt. Die nach unten gerichtete resultierende Kraft ist damit gegeben durch

$$F_{res} = -F_G + F_1 = F_G + F_0 - D \cdot y = -D \cdot y$$

oder

$$\underline{\underline{F_{res} = -D \cdot y < 0}}$$

Die Resultierende Kraft beschleunigt den Körper zur Ruhelage hin.

Wird der Körper um eine Strecke  $y$  nach unten ausgelenkt, so vergrößert sich die nach oben gerichtete Federkraft. Es wird  $F_2 = F_0 - D \cdot y$ . Hierbei ist aber  $y$  negativ, da nach unten ausgelenkt wird,  $-Dy$  wird dadurch positiv. Die resultierende Kraft ist somit

$$F_{res} = -F_G + F_1 = -F_G + F_0 - D \cdot y = 0 - D \cdot y$$

oder

$$\underline{\underline{F_{res} = -D \cdot y > 0}}$$

Die resultierende Kraft beschleunigt den Körper in beiden Fällen zur Ruhelage hin. Man sagt ihr in diesem Fall deshalb auch Rückstellkraft.

Die Rückstellkraft ist für ein Federpendel proportional zur Auslenkung. Für ein Federpendel lautet das Kraftgesetz.

$$F(t) = -D \cdot y(t) \quad (8.1)$$

Verdoppelt sich die Auslenkung, so verdoppelt sich auch die Rückstellkraft. Immer dann, wenn die Rückstellkraft linear von der Auslenkung abhängt, spricht man von einer harmonischen Schwingung.



Eine Schwingung ist dann harmonisch, wenn die Rückstellkraft proportional zur Elongation ist.

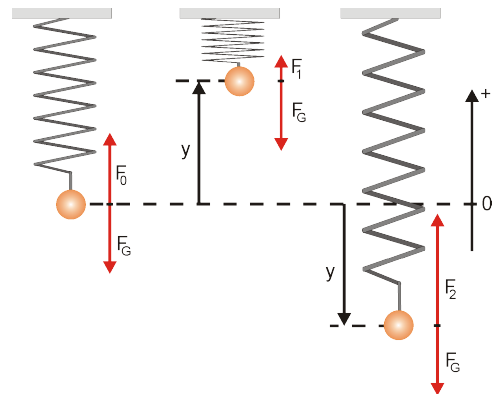


Abbildung 3 Ein Federpendel in der Gleichgewichtslage, am oberen Umkehrpunkt und am unteren Umkehrpunkt. Eingezeichnet sind jeweils die auf die Masse wirkenden Kräfte.

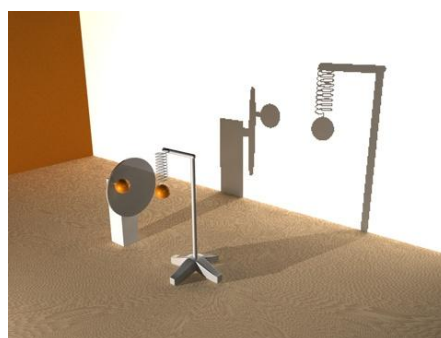
### 8.3.2 Die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

Versuchen wir einmal die Auslenkung als Funktion der Zeit für eine harmonische Schwingung zu ermitteln. Wir wissen, dass die Rücktreibende Kraft beim Federpendel gegeben ist durch  $F = -D \cdot y$ . Wir kombinieren dies mit dem zweiten Newton Gesetz  $F = m \cdot a$  und erhalten:

$$-D \cdot y(t) = m \cdot a(t) \quad (8.2)$$

Man kann diese Gleichung nicht einfach nach der Auslenkung auflösen. Das Problem dabei ist, dass sich mit der Auslenkung auch die Beschleunigung ändert weil beide Größen zeitabhängig sind. Wir umgehen die Probleme mit einem Trick.

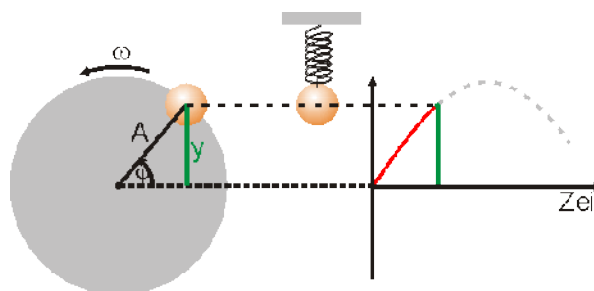
In Abbildung 4 sind zwei Massen gezeigt. Eine ist an einer Schraubenfeder aufgehängt und schwingt auf und ab, während die andere Masse auf einer rotierenden Kreisscheibe montiert ist, deren Durchmesser zweimal der Amplitude des Federpendels entspricht. Bei einer gewissen Rotationsgeschwindigkeit der Kreisscheibe erkennt man im Schattenbild der beiden Massen, dass sie sich scheinbar völlig synchron auf und ab bewegen. Offensichtlich kann die auf- und ab Bewegung des Federpendels mit einer Kreisbewegung verglichen werden.



**Abbildung 4** Im Schattenbild bewegen sich eine schwingende und eine rotierende Masse synchron auf und ab.

Eine Sinuskurve kann man aus einer Kreisbewegung gewinnen. Da die Bewegung des Federpendels im Auslenkung – Zeit Diagramm durch eine Sinuskurve beschrieben werden kann, muss sie mit der Kreisbewegung verwandt sein.

Stellt man einem Federpendel eine rotierende Kreisscheibe gegenüber, welche in während einer Periode des Federpendels genau eine Umdrehung ausführt, dies ist in Abbildung 5 dargestellt schematisch dargestellt, so erkennt man, dass die momentane Auslenkung  $y$  des Federpendels geschrieben werden kann als



**Abbildung 5** Vergleich einer rotierenden Kreisscheibe, und einem Fadenpendel mit dazugehörigem Auslenkung – Zeit Diagramm.

$$y(t) = A \cdot \sin(\varphi(t)), \quad (8.3)$$

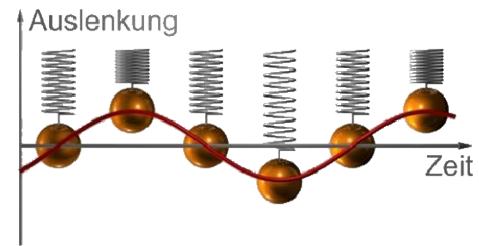
Wie gross ist aber der jeweilige Winkel  $\varphi(t)$ ? Nun, während einer Periode  $T$  muss die Kreisscheibe genau eine Umdrehung ausführen. Es wird in dieser Zeit also der Winkel  $2\pi$  (im Bogenmass) überstrichen. Die Kreisscheibe muss sich also mit der Winkelgeschwindigkeit (oder Kreisfrequenz)

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f \tag{8.4}$$

drehen. Für den Drehwinkel als Funktion der Zeit gilt demnach  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ , wobei  $\varphi_0$  ein allfällig vorhandener Winkel zum Zeitpunkt null ist. Man nennt ihn Phasenwinkel. Die Beziehung (8.3) lässt sich mit dieser Erkenntnis auch in der Form

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{8.5}$$

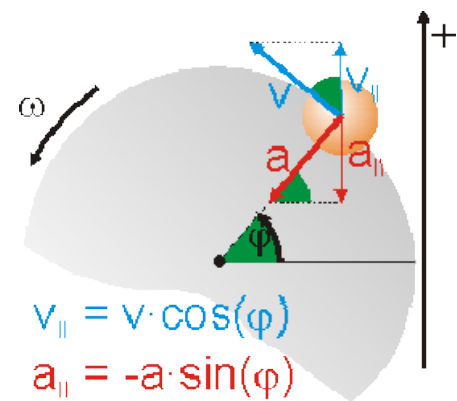
schreiben. Die Auslenkung als Funktion der Zeit folgt also der Sinusfunktion, wie das in Abbildung 6 dargestellt ist. Da es sich bei einem Federpendel um eine harmonische Schwingung handelt, kann man das verallgemeinern:



**Abbildung 6** Darstellung der einzelnen Positionen eines Federpendels als Funktion der Zeit. Die rote Kurve zeigt die Auslenkung des Massenschwerpunkts als Funktion der Zeit.

!> Entspricht das Elongation – Zeit Diagramm einer Schwingung einer Sinuskurve mit konstanter Amplitude, so spricht man von einer harmonischen Schwingung.

Durch eine Betrachtung der rotierenden Kreisscheibe man auch das Geschwindigkeit – Zeit Gesetz und das Beschleunigung – Zeit Gesetz von harmonischen Schwingungen ableiten. In ist wieder eine mit der Kreisfrequenz  $\omega$  rotierende Kreisscheibe dargestellt. Es sind der momentane Geschwindigkeitsvektor  $v$  und der Beschleunigungsvektor  $a$  plus deren Projektionen  $v_{||}$  und  $a_{||}$  auf die vertikale Achse eingezeichnet. Für diese beiden Projektionen gilt



**Abbildung 7** Zusammenhang zwischen der aktuellen Geschwindigkeit respektive Beschleunigung und deren Projektion auf die y-Achse.

$$v_{||}(t) = v \cdot \cos(\varphi(t)) = v \cdot \cos(\omega t) \tag{8.6}$$


$$a_{||} = -a \cdot \sin(\varphi(t)) = -a \cdot \sin(\omega t). \tag{8.7}$$

Das Minuszeichen in (8.7) trägt dem Umstand Rechnung, dass  $a_{||}$  nach unten, also in die negative Richtung zeigt, wenn der Radiusvektor nach oben weist. In (8.6) und (8.7) benutzt man nun noch die aus der Kreisbewegung bekannten Beziehungen  $v = \omega \cdot r$  und  $a = \omega^2 \cdot r$  und berücksichtigt, dass wir hier dem Radius der Kreisscheibe das Symbol A gegeben haben, dann folgen die beiden Gesetze

$$v_{||}(t) = v \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{8.8}$$

$$a_{||} = -a \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{8.9}$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen einer harmonischen Schwingung bekannt. Zusammenfassend stellen sich obige Ergebnisse folgendermassen dar:

	Kraftgesetz:	$F(t) = -D \cdot y(t) = -D \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$
	Ort – Zeit Gesetz:	$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$
	Geschwindigkeit – Zeit Gesetz:	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$
	Beschleunigung – Zeit Gesetz:	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

### 8.3.3 Die Periodendauer des Federpendels

Wenden wir uns noch einmal der Gleichung (8.2) zu und ersetzen darin die entsprechenden Funktionen mit den gerade gefundenen Beziehungen. Es folgt

$$-D \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -m \cdot A \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{8.10}$$

Für die Kreisfrequenz ergibt sich daraus

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{8.11}$$

Wendet man nun noch die bereits bekannte Beziehung  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  (8.4) darauf an, so bekommt man für die Periodendauer eines Federpendels

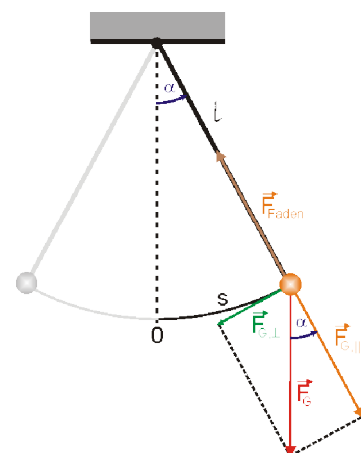
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \tag{8.12}$$

### 8.3.4 Das Fadenpendel

Ein an einem Faden hängender Körper kann relativ lange ohne merkliche Dämpfung um den tiefsten Punkt als Ruhelage schwingen. Betrachten wir uns die Situation so eines Pendelkörpers in Abbildung 8 etwas genauer.

#### 8.3.4.1 Das Kraftgesetz am Fadenpendel

Die Bogenlänge  $s$  entspricht der aktuellen Auslenkung des Pendelkörpers von der Ruhelage 0. Die rücktreibende Kraft  $F_{\perp}$  ist bei dieser Bewegung die tangentielle Komponente der Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ . Sie beträgt



**Abbildung 8** Fadenpendel inklusive der auf die schwingende Masse einwirkenden Kräfte.

$$F_{\perp} = -F_G \cdot \sin \alpha = -m \cdot g \cdot \sin \left( \frac{s}{l} \right) \quad (8.13)$$

Das Minuszeichen zeigt wieder an, dass die rücktreibende Kraft zur Gleichgewichtslage hin zeigt. Zusätzlich wurde die Beziehung zwischen Winkel und Bogenlänge

$\alpha = \frac{s}{l}$  benutzt.

Es fällt auf, dass die rücktreibende Kraft nicht linear von der Auslenkung abhängig ist – die Schwingung eines Fadenpendels ist also nicht harmonisch! Aber: Was nicht harmonisch ist, wird harmonisch gemacht! Legen wir los!

Zunächst stellen wir die Sinusfunktion als Reihenentwicklung dar:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots \quad (8.14)$$

Der Winkel  $\alpha$  wird dabei natürlich im Bogenmass gemessen. Nun wird (8.13) mit (8.14) verknüpft. Man erhält

$$F_{\perp} = -mg \left\{ \frac{s}{l} - \frac{\left(\frac{s}{l}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{s}{l}\right)^5}{5!} - \dots \right\} \approx -mg \cdot \frac{s}{l} = -D \cdot s, \quad (8.15)$$

wobei für den Proportionalitätsfaktor (auch Kraftkonstante genannt)

$$D = \frac{m \cdot g}{l} \quad (8.16)$$

gesetzt wurde. Wenn der Winkel  $\alpha$  also klein ist (kleiner als  $5^\circ$ ), so hängt die rücktreibende Kraft  $F_{\perp}$  linear von der Auslenkung  $s$  ab – die Schwingung eines Fadenpendels ist innerhalb der Einschränkung von kleinen Winkeln also harmonisch!

#### 8.3.4.2 Die Periodendauer des Fadenpendels

Zur Ermittlung der Periodendauer des Fadenpendels nehmen wir wieder Gleichung (8.2) zur Hilfe und setzen entsprechend (8.16) für die Kraftkonstante  $D$  ein:

$$-\frac{m \cdot g}{l} y(t) = -\omega^2 \cdot y(t). \quad (8.17)$$

Weiterhin wird beachtet, dass  $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$  gilt und dann nach der Periodendauer aufgelöst. Das Schlussresultat lautet dann



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8.18)$$

Analog hätte man auch mit einer bereits bekannten Beziehung arbeiten können, wie nachfolgend gezeigt wird.

Die Dauer einer Periode bei der harmonischen Schwingung dauert nach (8.12)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ . Der für das Fadenpendel gültigen Proportionalitätsfaktor  $D$  wurde unter (8.16) angegeben. Es ergibt sich für die Periodendauer eines Fadenpendels

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (8.19)$$

Sie sehen, mehrere Wege führen nach Rom. Allerdings ist die erste Variante systematischer.

### 8.4 Nicht harmonische Schwingungen

Wenn es der Definition nach harmonische Schwingungen gibt, dann muss es auch nicht harmonische Schwingungen geben. Genau genommen sind sogar die meisten Schwingungsformen in unserer Umwelt nicht harmonisch.

In einem ersten Beispiel betrachten wir eine Kugel, welche sich in einer Mulde hin und her bewegen soll. Für die rücktreibende Kraft  $F_{G,\parallel}$  gilt

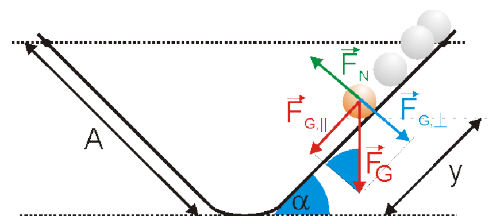


Abbildung 9 Hin und her rollen einer Kugel in einer Mulde. Diese Bewegung ist nicht harmonisch, weil die rücktreibende Kraft nicht von der Auslenkung  $y$  abhängt.

$$F_{G,\parallel} = F_G \cdot \sin(\alpha) = mg \cdot \sin(\alpha) \quad (8.20)$$

wobei  $\alpha$  der momentane Neigungswinkel der Mulde darstellt. Wie man unschwer erkennen kann, hängt in diesem Fall die Rückstellkraft weder linear sondern gar nicht von der Auslenkung ab.

Warum ist es denn aber überhaupt wichtig, harmonische Schwingungen als solche zu erkennen? Weil man dann entscheiden kann, ob die Bewegungsgleichungen der harmonischen Schwingung auf das aktuelle Problem anwendbar sind oder nicht!

### 8.5 Energie des harmonischen Oszillators – am Beispiel des Federpendels

Kehren wir noch einmal zum Federpendel zurück. In Abbildung 10 ist ein auf einer reibungsfreien Ebene schwingendes Federpendel dargestellt. Die Gesamtenergie des Federpendels entspricht dann der Summe aus kinetischer und potentieller Energie, wobei sich letztere aus der Lageenergie und der Spannenergie zusammensetzt:

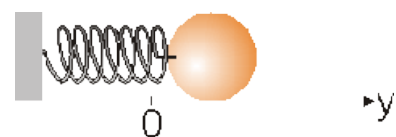


Abbildung 10 Horizontal schwingendes Federpendel

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot,Lage} + E_{pot,Feder} \quad (8.21)$$

Die Lageenergie ändert sich nicht und wird null gesetzt. Für die anderen beiden Energieformen gilt bekanntermassen  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$  und  $E_{pot,Feder} = \frac{1}{2}Dy^2$ . In diesen beiden Formeln wird die Geschwindigkeit mit (8.8) und die Höhe mit (8.5) ersetzt. Es ergibt sich aus (8.21)

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m(A\omega \cos(\omega t + \varphi))^2 + \frac{1}{2}D(A \sin(\omega t + \varphi))^2. \quad (8.22)$$

Von (8.10) kennt man noch die Beziehung  $D=m\omega^2$  für das Federpendel. Eingesetzt in (8.22) folgt dann

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (8.23)$$

woraus sich unter Berücksichtigung von  $\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$  sofort

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 A^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2 \quad (8.24)$$

ergibt.



Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist zeitlich konstant!

## 8.6 Gedämpfte Schwingungen

Normalerweise wird die Amplitude einer Schwingung mit der Zeit kleiner, bis die Schwingung schliesslich zum Stillstand kommt. Grund dafür sind Reibungseffekte, welche die Schwingungsenergie allmählich in innere Energie umwandeln. Man spricht von einer gedämpften Schwingung.

Als Beispiele von Reibungseffekten seien hier der Luftwiderstand und der Wasserwiderstand genannt. Im ersten Fall ist die Reibungskraft proportional zu  $v^2$ , der Widerstand im Wasser ist proportional zu  $v$ . Entsprechend ist das für harmonische Schwingungen gültige Kraftgesetz (8.1) so anzupassen, dass die jeweiligen Reibungskräfte mit berücksichtigt werden:

$$F(t) = F_{Oszillator} + F_{Reib} \quad (8.25)$$

Man wählt dasselbe wie in (8.2) und löst die entstandene Gleichung auf. Dazu werden Kenntnisse der Differentialrechnung benötigt. An dieser Stelle wird deshalb auf die Ableitung der exakten Lösung verzichtet. Die Lösungen zeigen aber, dass man dabei prinzipiell zwischen drei Fällen unterscheiden muss, welche alle in der Realität eine wichtige Rolle spielen.

### 8.6.1 Schwache Dämpfung

In Abbildung 11 sind die Auslenkungen von drei verschiedenen schwingenden Systemen dargestellt. Die graue Kurve entspricht einem ungedämpften Oszillator als Vergleich und die rote Kurve entspricht der Ortskurve einer gedämpften Schwingung. Die grüne Kurve zeigt die Auslenkung eines Oszillators, der stärker gedämpft ist als das rote System. Dies ist daran zu erkennen, dass beim grünen System die Amplitude schneller abnimmt.

Beispiele für schwach gedämpfte Schwingungen sind z.B. Trommeln, Gitarren oder Stimmgabeln. Sie alle haben einen relativ langen Nachhall.

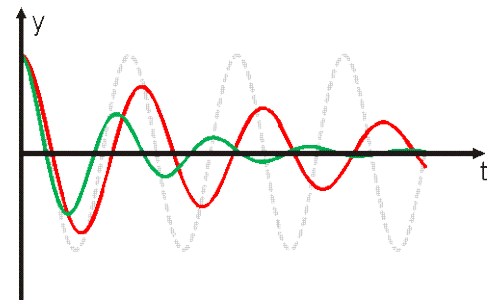


Abbildung 11 Auslenkungs-Zeit Diagramme für eine harmonische Schwingung (grau), eine schwach (rot) und eine stärker gedämpfte Schwingung.

### 8.6.2 Aperiodischer Grenzfall und Kriechfall

Die beiden anderen Fälle unterscheiden sich nur in der Zeit, in welcher der gedämpfte Oszillator in die Ruhelage zurückkehrt. Beim aperiodischen Grenzfall geht das System so schnell als möglich in seine Ruhelage zurück, wie das in gezeigt ist (rote Kurve). Beim Kriechfall hingegen geht das System nur sehr langsam in seine Ruhelage zurück (grüne Kurve).

In beiden Fällen ist das System so stark gedämpft, dass es gar nicht mehr schwingt!

Bei Fahrzeugen werden zur Dämpfung von Schlägen Stossdämpfer eingebaut. Dabei ist es natürlich erwünscht, dass das Fahrzeug möglichst schnell wieder zur Ruhe kommt. Man setzt deshalb Stossdämpfer ein, welche dem aperiodischen Grenzfall möglichst nahe kommen.

Bei einer Tankanzeige hingegen sind schnelle Änderungen unerwünscht – die Dämpfung ist so gross, dass das der Zeiger in seine Endposition kriecht.

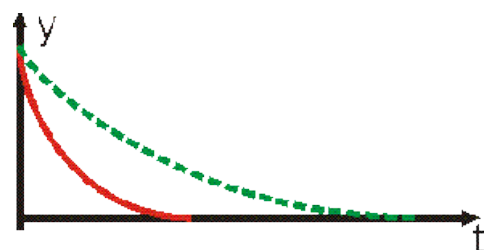


Abbildung 12 Aperiodischer Grenzfall (durchgezogen) und Kriechfall (gestrichelt)

### 8.7 Erzwungene Schwingung und Resonanz

In der Praxis ist es aber auch erwünscht, dass eine Schwingung nicht zur Ruhe kommt. Beispielsweise soll eine Pendeluhr Tage laufen und nicht bloss ein paar Minuten. Für solche Fälle ist es nötig, genau im richtigen Moment wieder Energie zuzuführen. Im Falle der Pendeluhr wird diese Rückkopplung z.B. Ankerhemmung genannt. Das Prinzip ist in Abbildung 13 gezeigt.

Doch nicht nur Pendeluhren müssen immer wieder angeregt werden. Rückkopplungsmechanismen sind in der Natur extrem wichtig. Der  $\text{CO}_2$  Gehalt in unserem Blut wird

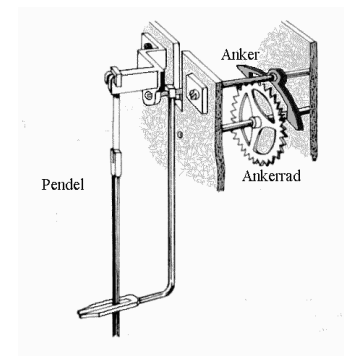
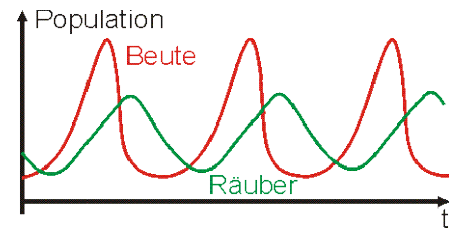


Abbildung 13 Hackenhemmung in Räderuhren. Quelle: Wikipedia

gesteuert, indem über  $\text{CO}_2$  Rezeptoren in unserer Halsschlagader die Konzentration des Gases im Blut gemessen wird. Im Atemzentrum wird der IST – Wert mit dem SOLL – Wert verglichen. Ist die Konzentration an  $\text{CO}_2$  im Blut zu hoch, so wird die Atmung beschleunigt, der  $\text{CO}_2$  Gehalt im Blut sinkt. Als Folge wird die Atmung wieder etwas gedrosselt.

Auch bei Populationen sind Rückkopplungsmechanismen zu erkennen. So hängen die Individuenzahlen von Beute und Räuber eng zusammen und schwanken periodisch mit der Zeit (Abbildung 14).



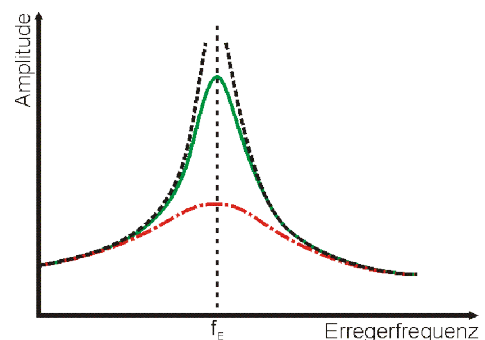
**Abbildung 14** Periodische Schwankung der Populationsstärke von Beute und Räuber mit der Zeit. Die zeitliche Verschiebung der Maximalwerte kommt durch die Rückkopplung zustande.

### 8.7.1 Resonanz

Kommen wir wieder zur Physik zurück. Wird ein System in Schwingung versetzt und sich selber überlassen, so schwingt es mit einer ganz bestimmten Frequenz, der Eigenfrequenz. Dies hat schon Galileo Galilei gewusst:

**„Vor allem aber müssen wir constatiren, dass jedes Pendel eine so feste und bestimmte Schwingungsdauer hat, dass man dasselbe in keiner Weise in einer anderen Periode schwingen lassen kann, als nur in dem von Natur eigenen...“**  
Galileo Galilei

Schwingungsfähige Systeme können zu Schwingungen angeregt werden, indem man sie mit einem Erreger mit der Erregerfrequenz koppelt. Untersucht man nun die Amplitude des erregten Systems als Funktion der Erregerfrequenz, wie das in Abbildung 15 dargestellt ist (man nennt die dabei entstehende Kurve eine Resonanzkurve), so stellt man fest, dass die Amplitude ihren Maximalwert erreicht, wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Systems ist. Das ist der dann der sogenannte Resonanzfall. Der Maximalwert der Amplitude hängt dabei von der Dämpfung des Systems ab - dem Dämpfungsfaktor. Ist die Dämpfung zu schwach, dann kann die Amplitude grösser werden, als die mechanische Konstruktion des Systems dies verkraften kann – es kommt zu einer Resonanzkatastrophe, welche das System zerstört. Eine solche



**Abbildung 15** Resonanzkurven eines Systems. Die durchgezogene Linie entspricht einer schwachen Dämpfung, die strichpunktierte Linie einer Resonanzkurve mit starker Dämpfung. Im Fall der gestrichelten Linien wächst die Amplitude über die zulässige Höchstgrenze – das System wird zerstört.



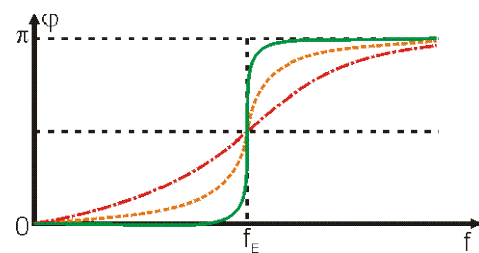
**Abbildung 16** Tacoma Narrows Bridge nach ihrem Einsturz am 7. November 1940. Quelle: Wikipedia

Resonanzkatastrophe hat 1940 zum Einsturz der Tacoma Narrows Bridge geführt. Sie wurde von Winden genau mit ihrer Resonanzfrequenz zu Schwingungen angeregt.

Bei der Erregung ist es wichtig, wie der Erreger im Vergleich mit dem angeregten System schwingt. Bei tiefen Anregungsfrequenzen werden Erreger und Oszillator gleichphasig schwingen. Um den grösstmöglichen Effekt zu erzielen, müssen Erreger und Schwinger aber phasenverschoben schwingen:

*„...aber einem ruhenden noch so schweren Pendel können wir durch Anblasen eine Bewegung ertheilen, und zwar eine recht beträchtliche, wenn wir das Blasen einstellen, sobald das Pendel zurückkehrt, und immer wieder blasen, in der dem Pendel eigenthümlichen Zeit; wenn auch beim ersten Blasen wir das Pendel nur um einen halben Zoll entfernt haben aus der Ruhelage, so werden wir, nach der Rückkehr desselben es nochmals anblasen, die Bewegung vermehren, und so weiter; aber zur bestimmten Zeit und nur nicht wenn das Pendel auf uns zu schwingt (denn in diesem Falle würden wir die Bewegung hemmen und nicht vermehren), und endlich wird eine so starke Schwingung hervorgerufen sein, dass es eine sehr viel grössere Kraft, als die eines einmaligen Anblasens erforderlich wäre, um die Ruhe wiederherzustellen.“ Galileo Galilei*

Was Galileo hier sagt, ist in Abbildung 14 bereits gezeigt: die Populationsverläufe sind gegeneinander phasenverschoben – die Räuber erreichen ihre Maximalindividuenzahl erst nachdem der Zenit bei den Beutetieren überschritten wurde. Für physikalische Systeme wie Pendel ist der Sachverhalt in Abbildung 17 gezeigt. Beim Resonanzfall schwingen Erreger und Schwinger um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben, was genau einer Viertel-Periode entspricht.



**Abbildung 17** Phasenverschiebung zwischen Erreger und Schwinger für verschiedene Resonanzkurven. Die strichpunktierte Linie entspricht einem stark gedämpften System, die ausgezogene Linie einem sehr schwach gedämpften. Im Resonanzfall beträgt die Phasenverschiebung genau eine viertel Periode.