8 Schwingungen

In diesem Kapitel geht es nicht nur um achtbeinige Insektenjäger. Was diese allerdings mit Schwingungen zu tun haben – das werden Sie hier erfahren.

Inhaltsverzeichnis

8.1 Beschreibung von Schwingungen - Begriffsdefinitionen

Ein an einem Faden aufgehängtes Objekt bewegt sich nach einem kleinen Stoss hin und her. Es gibt viele weitere Beispiele von Bewegungen, bei denen sich die Bewegungsrichtung immer wieder umkehrt. Solche sich immer wieder zu wiederholende Bewegungsabläufe nennt man **Schwingungen**. Schwingungsfähige Systeme bezeichnet man allgemein als **Oszillatoren**. Der Bewegungsablauf erfolgt zwischen zwei **Umkehrpunkten**. Häufig existiert eine ausgezeichnete Position des schwingenden Objektes, den **Gleichgewichts**- oder **Ruhepunkt (GGL)**. Die aktuelle Entfernung des schwingenden Punktes von seiner Ruhelage wird als **Auslenkung** oder **Elongation** bezeichnet. Die maximale Auslenkung nennt man **Amplitude A** (auch $\hat{y}$, sprich y-Dach, genannt). Für eine vollständige Schwingung (hin und zurück) benötigt das Objekt die **Dauer T**. Meistens verwendet man bei einer Schwingung die Angabe der Schwingungszahl, der **Frequenz**, also die *Anzahl der Schwingungen pro Sekunde*. Die Frequenz hat die eigene Einheit **Hertz (Hz)**.

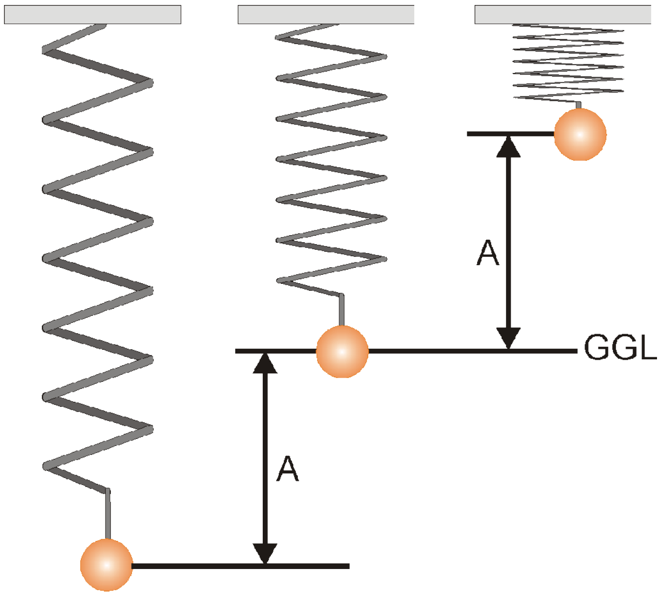


Abbildung 1: Federpendel

8.2 Harmonische Schwingung

Wir beginnen mit einem Spezialfall von Schwingungen, der **harmonischen Schwingung**.

Ergibt das Elongations – Zeit Diagramm einer Schwingung eine Sinuskurve, so spricht man von einer harmonischen Schwingung. Von Reibung soll an dieser Stelle abgesehen werden, so dass die Amplitude zeitlich konstant ist. Diesem nie ganz zu realisierenden Spezialfall sagt man freie ungedämpfte mechanische Schwingung.

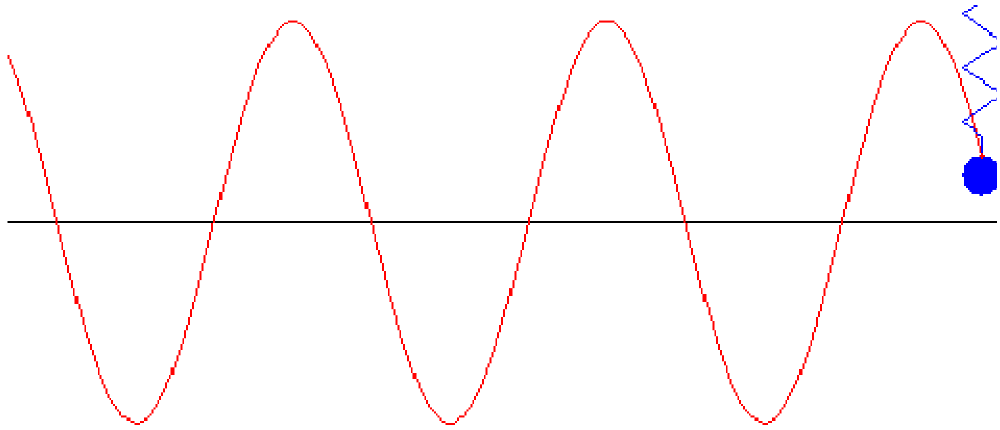


Abbildung 2: y-t Diagramm einer harmonischen Schwingung

8.2.1 Welches Kraftgesetz sorgt für harmonische Schwingungen?

Betrachten Sie die Momentanbilder der Schwingung, wie sie in der folgenden Grafik dargestellt ist.

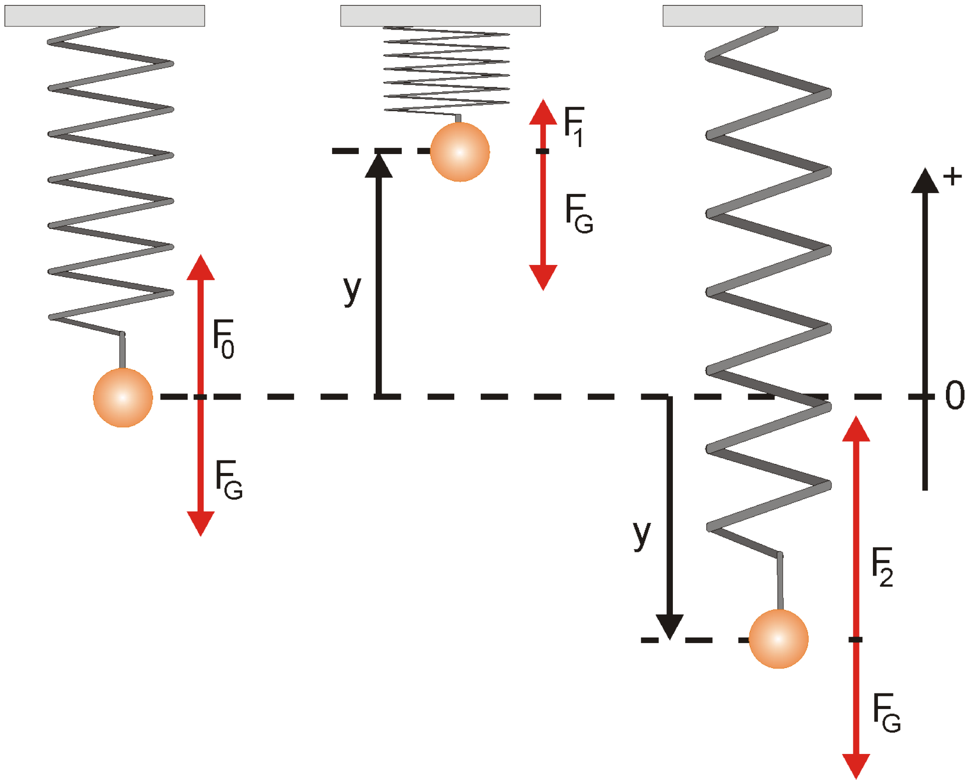


Abbildung 3: Das Federpendel nach der Auslenkung y

In der Gleichgewichtslage hebt die nach unten gerichtete Gewichtskraft die nach oben gerichtete Federkraft gerade auf. Die resultierende Kraft auf die Kugel ist also

$$F_{res} = F_G + F_0 = \underline{\underline{0}}$$

Wird der Körper um die Strecke y > 0 nach oben ausgelenkt, so verkleinert sich die nach oben wirkende Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - D \cdot y$. Die Gewichtskraft überwiegt also. Die nach unten gerichtete Gewichtskraft ist also

$$F_{res} = F_G + F_1 = F_G + F_0 - D \cdot y = 0 - D \cdot y \text{ oder}$$

$$\underline{\underline{F_{res} = -D \cdot y < 0}}$$

Wird der Körper um eine Strecke y nach unten ausgelenkt, so vergrössert sich die nach oben gerichtete Federkraft. Es wird $F_2 = F_0 - D \cdot y$. Hierbei ist aber y negativ, -Dy wird also positiv. Die resultierende Kraft ist somit

$$F_{res} = F_G + F_1 = F_G + F_0 - D \cdot y = 0 - D \cdot y \text{ oder}$$

$$\underline{\underline{F_{res} = -D \cdot y > 0}}$$

Die Rückstellkraft ist also proportional zur Auslenkung y. Es gilt das Kraft – Auslenkungs – Gesetz F = -Dy mit der Federkonstanten D.

Eine Schwingung ist dann harmonisch, wenn die Rückstellkraft proportional zur Elongation ist. Das Kraftgesetz muss also linear sein.

8.2.2 Nicht harmonische Schwingungen

Die harmonischen Schwingungen stellen einen Spezialfall dar, den man mathematisch leicht beschreiben kann. Viele Schwingungsformen in unserer Umwelt sind aber nicht harmonisch. Um dies genauer zu untersuchen, bedienen wir uns des Beispiels der Schwingung einer Kugel in einer Geländemulde:
In diesem Fall hängt die Rückstellkraft nicht linear von der Auslenkung ab. Für die Kraft F folgt

$$F = F_G \cdot \sin(\alpha) = mg \cdot \sin(\alpha),$$

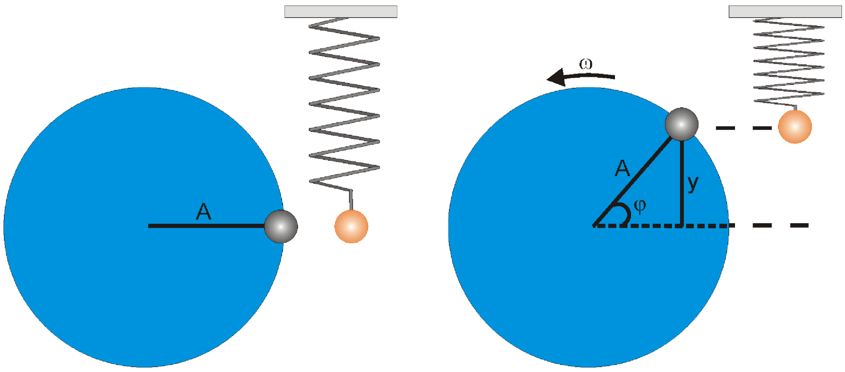
wobei α der momentane Neigungswinkel der Mulde darstellt. Die rücktreibende Kraft ist in diesem Fall überhaupt nicht von der Auslenkung abhängig – es liegt keine harmonische Schwingung vor.

8.2.3 Die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

Versuchen wir einmal die Bewegungsgleichung für eine harmonische Schwingung zu ermitteln. Wir wissen, dass die Rücktreibende Kraft beim Federpendel gegeben ist durch F = -Dy. Wir kombinieren dies mit dem zweiten Newton und erhalten:

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -D \cdot y = m \cdot a$$

Dies sieht für uns (jedenfalls noch) mathematisch ziemlich kompliziert aus. Das Problem dabei ist, dass sich mit der Auslenkung auch die Beschleunigung ändert und damit auch die Geschwindigkeit. Wir umgehen die Probleme mit einem Trick. Eine Sinuskurve kann man aus einer Kreisbewegung gewinnen. Da die Bewegung des Federpendels im Auslenkungs – Zeit Diagramm durch eine Sinuskurve beschrieben werden kann, muss sie mit der Kreisbewegung verwandt sein. Dies wird in folgendem Bild zu beschreiben versucht.



Stellt man einem Federpendel eine rotierende Kreisscheibe gegenüber, welche in einer Periode des Federpendels genau eine Umdrehung ausführt, so kann die momentane Auslenkung y des Federpendels geschrieben werden als

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit darstellt, mit der die Scheibe rotiert. Wie bestimmt man aber die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Kreisscheibe rotieren muss? Nun, für eine Periodendauer T, muss die Kreisscheibe genau eine Umdrehung ausführen. Es wird in dieser Zeit also der Winkel 2π (Bogenmass) überstrichen. Es gilt somit

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f \; .$$

Auf die selbe Weise kann man die aktuelle Geschwindigkeit und die aktuelle Beschleunigung der schwingenden Masse angeben. An dieser Stelle soll auf die Herleitung verzichtet werden. Nehmen Sie einfach die Resultate zur Kenntnis.

für die Geschwindigkeit: $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

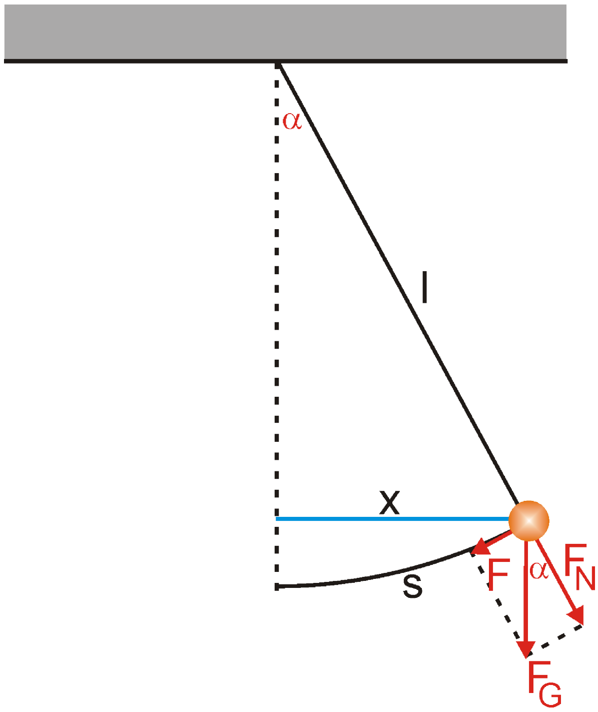
für die Beschleunigung: $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

8.2.4 Zusammenfassung der Gesetze der harmonischen Schwingung

Kraftgesetz:	$F(t) = -D \cdot y(t) = -D \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Ort – Zeit Gesetz:	$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Geschwindigkeit – Zeit Gesetz:	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$
Beschleunigung – Zeit Gesetz:	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

8.3 Das Fadenpendel

Ein an einem Faden hängender Körper kann relativ lange ohne merkliche Dämpfung um den tiefsten Punkt als Ruhelage schwingen. Betrachten wir uns die Bahn des Pendelkörpers in einer Skizze etwas genauer.



Man kann den Winkel α als Mass für die Auslenkung s verstehen. Wenn man α im Bogenmass misst, so gilt $\alpha = \frac{s}{l}$. Die rücktreibende Kraft F ist bei dieser Bewegung die tangentiale Komponente der Gewichtskraft F_G (in Richtung der Ruhelage zeigend). Sie beträgt

$$F = -F_G \cdot \sin\alpha = -m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{s}{l}\right)$$

Dabei ist anzumerken, dass die rücktreibende Kraft nicht linear von der Auslenkung abhängig ist – die Schwingung eines Fadenpendels ist also nicht harmonisch!

Aber: betrachtet man nur kleine Auslenkungen – also kleine Winkel α – so kann man mit ruhigem Gewissen $\sin\left(\frac{s}{l}\right) \approx \frac{s}{l}$ schreiben. Obiges Kraftgesetz wird also

$$F = -m \cdot g \cdot \frac{s}{l} = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot s = -D \cdot s$$

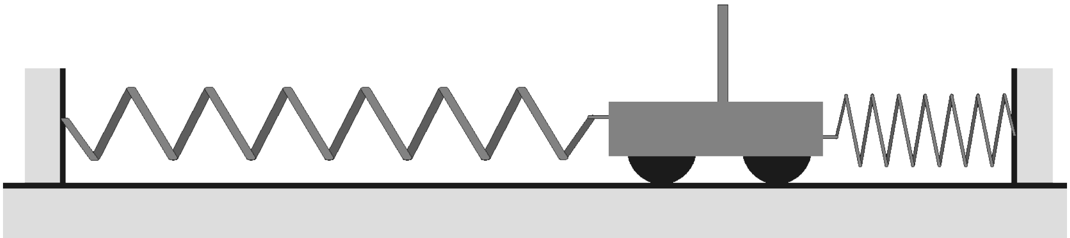
Das Minuszeichen drückt dabei aus, dass die rücktreibende Kraft stets entgegen der Auslenkung s gerichtet ist. Man kann also sagen:

Bei kleinem Auslenkungswinkel a schwingt das Fadenpendel harmonisch.

Wie gross ist die Periodendauer? Die Dauer einer Periode bei der harmonischen Schwingung dauert $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$. Mit dem gerade erhaltenen Kraftgesetz wird die Periode für das Fadenpendel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

8.4 Energie des harmonischen Oszillators



Das System in obiger Zeichnung kann als harmonischer Oszillator aufgefasst werden. Dabei werden nur Spannenergie der Federn und kinetische Energie der Pendelmasse periodisch ineinander umgewandelt. Für die Spannenergie folgt

$$E_{def} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(y(t)\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$

Für die kinetische Energie erhält man

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v(t)\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2 \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t)$$

Nun interessiert uns noch die Summe der beiden Energien:

$$E_{gesamt} = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot m \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot m \cdot (2\pi f)^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot A^2 \cdot m \cdot f^2$$

Dabei haben wir die Beziehung

$$D = \omega^2 \cdot m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m = (2\pi f)^2 \cdot m$$

verwendet. Wir fassen zusammen

Bei einer harmonischen Schwingung nimmt die mechanische Gesamtenergie quadratisch mit der Frequenz f und der Amplitude A zu.

8.5 Interferenz

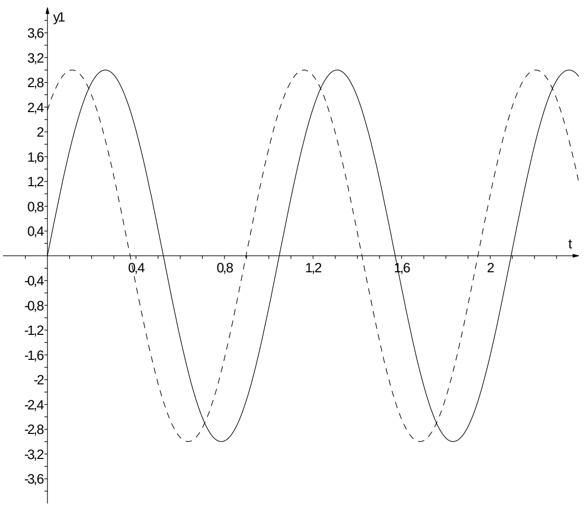
Bei der Wahrnehmung von Tönen beginnt unser Trommelfell zu schwingen, genauso, wie die Membran einer Trommel schwingt, wenn diese angeschlagen wird. Trifft nur ein Ton unser Trommelfell, so schwingt dieses logischerweise mit der Frequenz des Tones. Was ist aber, wenn zwei Töne mit verschiedenen Frequenzen auf unser Trommelfell treffen? Wie schwingt es dann? Es kann ja nur auf eine Art schwingen! Und wieso können wir dann trotzdem Töne getrennt wahrnehmen? Diese Frage wird in diesem Abschnitt beantwortet werden. Für die folgenden Ausführungen nehmen wir einfach mal an, dass die Tonhöhe eines Tons durch die Frequenz gegeben ist und die Lautstärke proportional zum Quadrat der Amplitude.

Schwingungen können sich also gemäss obigen Ausführungen überlagern. Dabei gilt das Superpositionsprinzip – das heisst, die Auslenkung der Interferenz entspricht jederzeit der Summe der Elongationen der Einzelschwingungen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

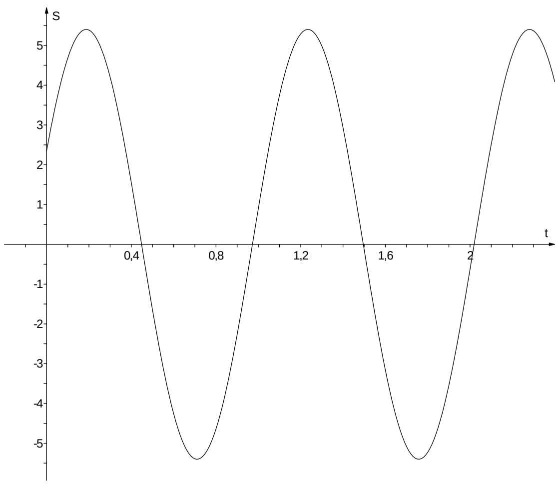
8.5.1 Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz und Amplitude

Die nun betrachteten Schwingungen (z.B. zweier Stimmgabeln) besitzen die gleiche Frequenz (gleicher Ton) und die gleiche Amplitude. Sie besitzen jeweils eine Phasendifferenz φ_1 respektive φ_2 (weil sie nicht zum selben Zeitpunkt in Schwingung versetzt worden sind). Bevor wir uns auf die Mathematik stürzen, wollen wir die Überlagerung mal grafisch vollziehen. Die beiden zu überlagernden Schwingungen werden der Vorgabe entsprechend beschrieben durch $y_1(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Darstellung der beiden Einzelschwingungen



Darstellung der Überlagerung der beiden Schwingungen



Die Schwingungsgleichung, der bei der Überlagerung entstehenden Schwingung, lautet rechnerisch

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \langle\varphi\rangle\right).$$

Dabei ist $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ und $\langle\varphi\rangle = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$. Ausserdem wurde die Beziehung $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left\{\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}\cos\left\{\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}$ verwendet.

Wichtig ist festzustellen, dass in diesem Fall wieder eine harmonische Schwingung entsteht, welche dieselbe Frequenz besitzt (gleicher Ton), wie die beiden Teilschwingungen. Die Amplitude der resultierenden Schwingung entspricht zweimal der Grundamplitude mal einen Faktor $\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$. Da die Lautstärke eines Tones proportional zum Quadrat der Amplitude ist, wird der Ton einfach lauter.

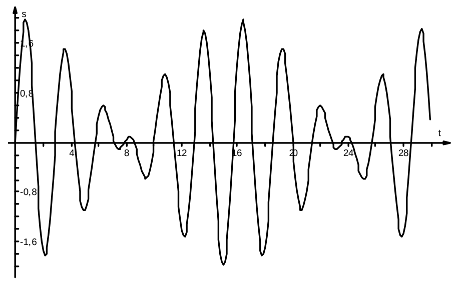
8.5.2 *Interferenz zweier harmonischer Schwingungen gleicher Amplitude aber unterschiedlicher Frequenz*

Im zweiten Fall soll nun wiederum die Amplitude der überlagerten Schwingungen gleich sein, die Frequenz jedoch unterschiedlich. Auch die Phasendifferenz soll hier null sein. Die beiden zu überlagernden Schwingungen werden nach den Vorgaben beschrieben durch $y_1(t) = A\cdot\sin(\omega_1 t)$ und $y_2(t) = A\cdot\sin(\omega_2 t)$. Die Summe ist

$$y(t) = 2A\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right) = 2A\cdot\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t\right)\sin\left(\langle\omega\rangle\cdot t\right),$$

wobei $\langle\omega\rangle = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ die mittlere Kreisfrequenz und $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ die Differenz der Kreisfrequenzen sei.

In diesem Fall entsteht eine Schwingung, deren Amplitude mit der Frequenz $\frac{\Delta\omega}{2}$ moduliert ist (das Quadrat der Amplitude ist also nicht konstant – ein entsprechender Ton würde also seine Lautstärke permanent, aber einem Muster folgend, ändern). Grafisch zeigt sich dies sehr deutlich.



8.5.3 *Schwebung*

Schlägt man zwei Stimmgabeln an, bei welchen sich die Frequenz des entstehenden Tones nur *wenig* voneinander unterscheidet, so hört man ein regelmässiges An- und Abschwellen des Tones. Diesem Effekt sagt man Schwebung.

Überlagern sich zwei harmonische Schwingungen, die sich in ihrer Frequenz nur *geringfügig* unterscheiden, so führt dies zu einer Schwebung

Wir haben oben gesehen, dass die Amplitude der Interferenzschwingung zweier harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenz zeitabhängig ist:

$$A_{y_1+y_2} = 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right).$$

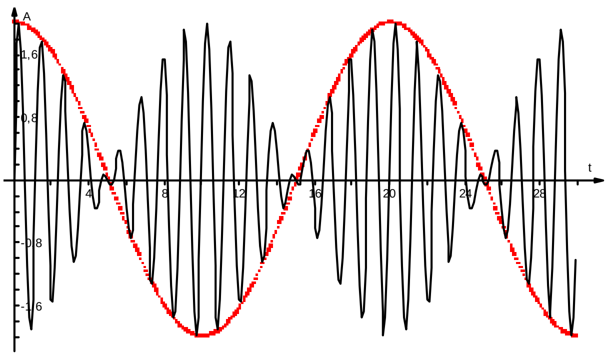
Nun interessiert uns die Frage nach der Schwebungsfrequenz. Nehmen wir noch einmal das Ergebnis für y(t) aus dem vorherigen Abschnitt:

$$y(t) = 2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \sin\left(\langle\omega\rangle \cdot t\right)$$

Die mittlere Kreisfrequenz ist wieder $\langle\omega\rangle = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und die Differenz der Kreisfrequenzen beträgt ebenfalls $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Etwas umgeschrieben lautet die Funktion also

$$y(t) = 2A\cos(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \sin\left(2\pi \langle f \rangle \cdot t\right)$$

Wobei man $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ und $\langle f \rangle = \frac{\langle\omega\rangle}{2\pi}$ verwendet. Die nächste Abbildung zeigt die Resultierende zweier sich überlagernder Schwingungen, welche sich nur wenig in der Frequenz unterscheiden.



Die Einhüllende entspricht einer Schwingung mit der doppelten Amplitude der Einzelschwingungen und einer Frequenz von $\langle f \rangle$. Mit dieser Frequenz hört man den Ton an- und abschwellen.

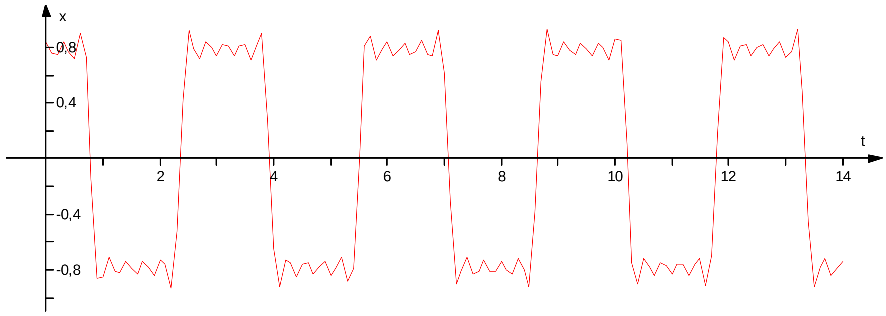
8.5.4 Fourieranalyse

Durch die Überlagerung von Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen und Amplituden kann man im Prinzip jede andere Schwingungsform erzeugen. Jean

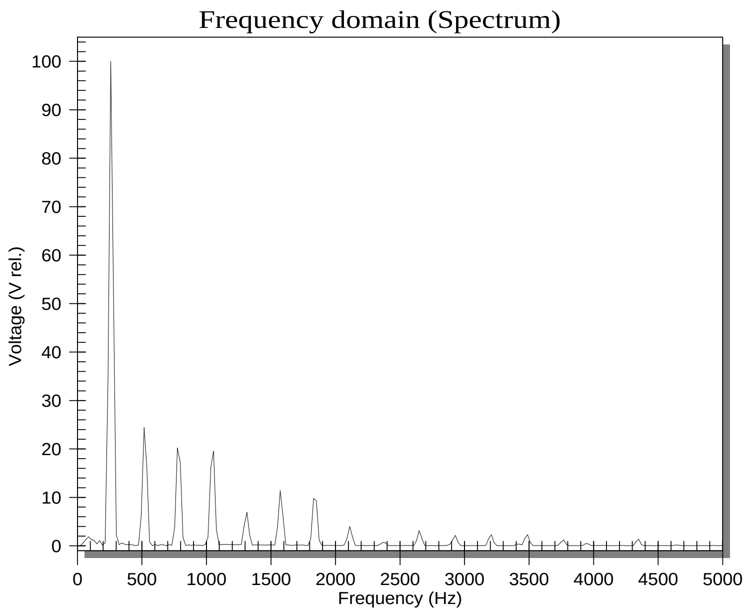
Baptiste de Fourier (1768-1830) hat dieses Verfahren entwickelt. Die folgende Funktion erzeugt zum Beispiel eine eine Rechteckschwingung:

$$y(t)=\cos(\omega t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega t)-\frac{1}{7}\cos(7\omega t)+\frac{1}{9}\cos(9\omega t)-...$$

In der nächsten Abbildung ist obige Funktion bis zum fünften Term dargestellt. Man erkennt bereits sehr deutlich die Form der Rechteckkurve.



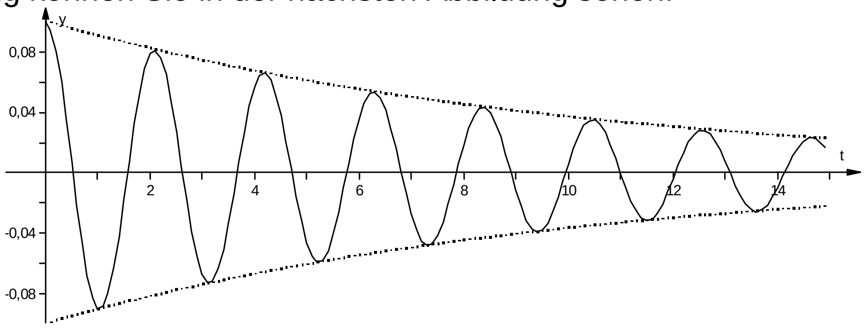
Natürlich geht auch der umgekehrte Weg: jede gegebene Schwingung kann in harmonische Schwingungen zerlegt werden. Dies erfordert jedoch weitergehende mathematische Kenntnisse, weshalb wir an dieser Stelle auf ein rechnerisches Beispiel verzichten.
Töne und Geräusche können mit geeigneten technischen Hilfsmittel in harmonische Schwingungen zerlegt werden. Man erhält dabei das sogenannte Frequenzspektrum eines Tons. Dies sieht für ein „c" eines Klaviers so aus:



Das Frequenzspektrum ist für jeden Ton und auf jedem Instrument anders. Doch davon mehr innerhalb eines Versuches.

8.5.5 Gedämpfte und Erzwungene Schwingungen

Normalerweise wird die Amplitude einer Schwingung mit der Zeit kleiner, bis die Schwingung schliesslich zum Stillstand kommt. Grund dafür ist die Reibung, welche die Schwingungsenergie allmählich in innere Energie umwandelt. Man spricht von einer **gedämpften** Schwingung. Das y-t Diagramm einer gering gedämpften Schwingung können Sie in der nächsten Abbildung sehen:



Die Amplitude nimmt jeweils um einen festen Prozentsatz pro Zeiteinheit ab. Die Abnahme der Amplitude folgt also einem Exponentialverlauf.

Möchte man die Amplitude auf einem konstanten Niveau halten oder gar wieder vergrössern, so muss dem System Energie zugeführt werden. Einer solchen Schwingung sagt man dann angetriebene oder **erzwungene** Schwingung.

8.5.5.1 Resonanz

Für die weitere Diskussion sind ein paar Begriffsbildungen nötig. Wird ein System in Schwingung versetzt und sich selber überlassen, so schwingt es mit einer ganz bestimmten Frequenz. Dieser Frequenz sagt man Eigenfrequenz. Sorgt man dafür, dass die Amplitude des schwingenden Systems nicht kleiner wird, so wird man einen Erreger mit einer entsprechenden **Erregerfrequenz**.

Versuch: Ein Wagen wird zwischen zwei Federn eingespannt. Das eine Federende wird mit dem Exzenter eines Motors verbunden. Machen Sie sich vom Versuchsaufbau eine Skizze:

Beobachtungen:

8.6 Aufgaben

1) Sind bei einem vertikal auf- und abspringenden Ball die Bedingungen einer harmonischen Schwingung erfüllt? Begründen Sie. Die Reibung werde vernachlässigt.

2) Ein Reagenzglas mit flachem Boden wird mit Bleikügelchen der Masse m teilweise gefüllt und so ins Wasser gestellt, dass das Reagenzglas aufrecht stehend im Wasser schwimmt. Es wird nun um eine gewisse Strecke A tiefer ins Wasser gedrückt und losgelassen. Das Reagenzglas führt nun eine periodische Auf- und Abbewegung aus. Ist diese harmonisch?

3) Ein Körper mit der Masse m beginne bei y = +25 cm seine Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage y = 0 mit der Schwingungsdauer von 1.5 s. Schreiben Sie

   a) den Ort y
   b) die Geschwindigkeit v und
   c) die Beschleunigung a als Funktionen der Zeit auf.

4) Ein linear, harmonisch schwingender Massenpunkt geht zur Zeit t = 0 in der positiven y – Richtung durch die Gleichgewichtslage und erreicht eine Amplitude von 50.0 cm. Seine Periode ist 6.0 s.

   a) Man berechne Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunktes für die Zeiten 1.5, 3.0 und 5 s. (50.0, 0, -43.3 cm; 0, -52.4, 26.2 cm/s; -54.5, 0, 47.5 cm/s^2)
   b) Wann wird zum erstenmal die Elongation –25 cm erreicht? (3.5 s)
   c) Ferner sind Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit graphisch darzustellen.

5) Bei einer harmonischen, linearen Schwingung eines Massenpunktes beträgt die Schwingungsdauer 2 s und die Amplitude 20 cm.

   a) Wie gross ist die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Nulllage? (62.8 cm/s)
   b) In welcher Elongation befindet sich die Masse 0.2 s nach dem Durchgang durch die Nulllage, und wie gross ist an dieser Stelle ihre Geschwindigkeit? (11.8 cm; 50.8 cm/s)

6) Ein Stein wird an einer 50 cm langen Schnur auf einer horizontalen Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (gleichbedeutend mit Kreisfrequenz) $\omega = 10\ s^{-1}$ herumgeschleudert. Wie sieht die Bewegung für einen Beobachter aus, dessen Augen sich genau auf der Höhe der Kreisbahn befinden? Geben Sie die Weg – Zeit Funktion dieser scheinbaren Bewegung an! Lösung: $x(t) = A\sin(\omega t) = 49 \cdot cm \cdot \sin\left(10 \cdot \frac{1}{s} \cdot t\right)$.

7) Eine harmonische Schwingung mit der Frequenz 2 Hz hat eine Amplitude von 12 cm.

a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle und interpretieren Sie die Ergebnisse:

t [s]	0	0.1	0.2		0.3	0.375	
s [cm]	0			0			
v [m/s]	-1,51						-0,466
a [m/s^2]							

b) Wie gross ist die Auslenkung und Geschwindigkeit 0,1s (0,2s; 0,3s) nachdem die Schwingung den Umkehrpunkt (d.h. das Maximum) durchlaufen hat?

8) Eine Sinusschwingung mit der Frequenz f = 20/s hat die Amplitude A = 12 cm.

a) Nach welcher Zeit, vom Nulldurchgang gerechnet, beträgt die Auslenkung zum ersten Mal 8 cm.

b) Wie lange dauert es dann, bis diese Position zum zweiten Mal erreicht wird? (*Symmetrien ausnützen!)*

9) Ein Gegenstand der Masse 2.5 kg hänge an einer Feder mit der Federkonstanten 600 N/m und schwinge mit einer Amplitude von 3 cm. Wie gross ist

a) die Gesamtenergie des Systems,
b) die potentielle Energie des Gegenstandes,
c) die potentielle Energie der Feder, wenn der Gegenstand seinen tiefsten Punkt erreicht hat?
d) Bestimmen Sie das Maximum der kinetischen Energie. (In der Gleichgewichtslage sei E_{pot} = 0.)

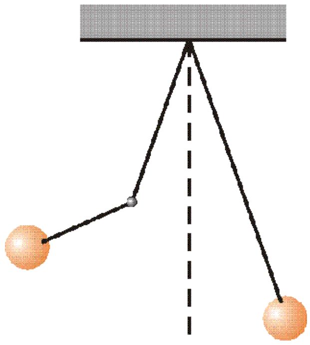
10) Im Innern des Mondes nimmt die Schwerkraft bis zum Wert Null im Mondmittelpunkt gleichmässig ab. Welche Periodendauer hätte ein Körper, der in einem geraden, durch den Mondmittelpunkt verlaufenden Schacht hin- und herschwingt? Wie gross ist seine Geschwindigkeit beim Passieren des Mondmittelpunktes? (Mondradius = 1738 km, Fallbeschleunigung g = 1.62 m/s^2) Lösungen: 6508 s, 1678 m/s

11) Eine Spinne der Masse 0.36 g sitze inmitten ihres horizontal gespannten Netzes, das sich durch die nach unten wirkende Gewichtskraft um 3 mm absenkt. Schätzen Sie die Frequenz vertikaler Schwingungen dieses Systems.

12) Ein Fadenpendel der Länge 40 cm wird um 12 cm ausgelenkt und losgelassen. Bestimmen Sie seinen Abstand zur Ruhelage, seinen Geschwindigkeitsbetrag und seinen Beschleunigungsbetrag 10 Sekunden nach dem ersten Durchgang durch die Ruhelage.(Die Bewegung sei reibungsfrei.)

13) Ein Federpendel mit der Federkonstanten D = 12 N/m wird um 12 cm ausgelenkt und losgelassen. Eine Masse von 2 kg hängt an der Feder und beginnt zu schwingen. Bestimmen Sie den Abstand der Masse zur Ruhelage, den Geschwindigkeitsbetrag und den Beschleunigungsbetrag 10 s nach dem ersten Durchgang durch die Ruhelage, falls die Schwingung reibungsfrei verläuft.

14) Ein Fadenpendel wird um 25 cm nach rechts ausgelenkt und dann losgelassen. Es ergibt sich eine Schwingung mit einer Schwingungsdauer von T = 2.8 s. Reibung und Luftwiderstand seien vernachlässigbar.



a) Wie gross ist die Fadenlänge?
b) Wie gross ist die Auslenkung des Körpers nach t_1 = 0.7 s bzw. t_2 = 0.9 s nach dem Loslassen? Wo befindet sich das Pendel zu diesen Zeiten?
c) 1.2 m unterhalb des Aufhängepunktes wird ein Stab angebracht, an dem der Faden zur linken Seite hin "blockiert" wird (s. Skizze). Das Pendel wird wieder 25 cm nach rechts ausgelenkt und losgelassen. Wie lange dauert jetzt eine ganze Schwingung?
d) Wie weit schwingt das Pendel im Fall c) maximal nach links und an welcher Position befindet es sich nach einer Sekunde?

15) Zwei harmonische Schwingungen gleicher Frequenz überlagern sich. Ihre Amplituden betragen 2 cm und 3 cm. Die erste Schwingung beginnt zur Zeit 0, die Zweite eilt um $\pi/3$ in der Phase nach. Stellen Sie das Auslenkungs – Zeit Diagramm der resultierenden Schwingung auf Ihrem Taschenrechner dar. Lesen Sie anschliessend deren Amplitude und Phasenverschiebung aus der Graphik ab.

16) Was ist unter dem Begriff Resonanz zu verstehen? Unter welchen Bedingungen kann es zu einer Resonanzkatastrophe kommen?

17) Im Jahre 1831 stürzte bei Manchester eine Hängebrücke ein, als Truppen im Gleichschritt über sie zogen. Seither ist das Marschieren auf Brücken verboten. Erklären Sie dies! Schätzen Sie (ohne blind zu raten) die Eigenfrequenz der Brücke ab.

8.7 Lösungen

1) Nein, die rücktreibende Kraft ist unabhängig von der Höhe h.

2) Ja, denn die rücktreibende Kraft ist gegeben durch $F = F_{Auftrieb} = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot V_{verdrängt} = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot A_{\mathrm{Reagenzglas}} \cdot h$, wobei h sich mit der Zeit ändert.

3) Die Amplitude ist A = 25 cm. Die Periode T ist 1.5 s. Damit ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4.19\frac{rad}{s}$. Damit ist

a) $y(t) = A \cdot \sin(\omega t) = 25\,cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1.5\,s} \cdot t\right)$

b) $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = 25\,cm \cdot \frac{2\pi}{1.5s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{1.5\,s} \cdot t\right)$

c) $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = -25cm \cdot \left(\frac{2\pi}{1.5s}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1.5\,s} \cdot t\right)$

4) Die Amplitude ist A = 50 cm und die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6s}$.

a) Die Funktionen für den Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sind:
$y(t) = A \cdot \sin(\omega t) = 50\,cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6\,s} \cdot t\right)$,
$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = 50\,cm \cdot \frac{2\pi}{6s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{6\,s} \cdot t\right)$ und
$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = -50cm \cdot \left(\frac{2\pi}{6s}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{6\,s} \cdot t\right)$. Setzt man in diesem Funktionen die geforderten Zeiten ein, so ergibt sich:

t = 1.5s y(1.5s) = 50cm, v(1.5s) = 0, a(1.5s) = -54.5 cm/s^2
t = 3.0s y(3.0s) = 0cm, v(3.0s) = -52.4 cm/s, a(1.5s) = 0 cm/s^2
t = 5.0s y(1.5s) = -43.3cm, v(1.5s) = 26.2 cm/s, a(1.5s) = 47.5 cm/s^2

b) Anleitung: Stellen Sie y(t) und eine Gerade mit y = –25cm auf Ihrem Taschenrechner graphisch dar. So sehen Sie die gewünschte Schnittstelle und können sich diese auch berechnen lassen.

c) Benutzen Sie auch hierfür Ihren Taschenrechner!

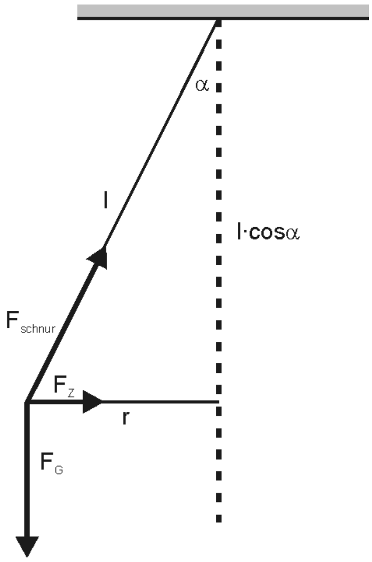
5) Die Amplitude ist 20 cm und die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2s}$.

a) Beim Durchgang durch die Nulllage muss die Geschwindigkeit maximal sein, d.h. der Cosinus muss gleich eins werden. Dies ist natürlich zum Zeitpunkt t = 0 der Fall. Für die Geschwindigkeit folgt dann $v\max = A\omega = 20cm \cdot \frac{2\pi}{2s} = 62.8\frac{cm}{s}$.

b) $y(0.2s) = A \cdot \sin(\omega t) = 20\,cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2\,s} \cdot 0.2s\right) = 11.8\,cm$ und

$$v(0.2s) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = 20\,cm \cdot \frac{2\pi}{2s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2\,s} \cdot 0.2\right) = 50.8\frac{cm}{s}$$

6) Bei dieser Aufgabe ist eine Zeichnung zwingend erforderlich, um den Zugang zur Amplitude zu finden. Aus der Skizze kann man ablesen, dass gilt $\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{mr\omega}{mg} = \frac{r\omega}{g}$. Es gilt aber auch $\tan\alpha = \frac{r}{l \cdot \cos\alpha}$. Gleichsetzen und ausrechnen liefert $\cos\alpha = \frac{g}{l \cdot \omega^2} \Rightarrow \alpha = 78.7°$. Der Radius r, bzw. die Amplitude ist dann $A = l \cdot \sin\alpha = 49\,cm$.



7) Die Amplitude ist A = 12 cm und $\omega = 2\pi f = 12.57\frac{rad}{s}$. Die Bewegungsgleichungen sind $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$, $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ und $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$.

a) Damit wird die Tabelle:

t [s]	0	0.1	0.2	0.25	0.3	0.375	0.4
y [cm]	0	11.4	7.1	0	-7.1	-12	-11.4
v [m/s]	1.51	0.466	-1.22	-1.51	-1.22	0	0.466
a [m/s²]	0	-18.02	-11.14	0	11.14	18.95	18.02

Interpretation:
Die Schwingungsdauer ist T = 1/f = 0,5 s. Daher ist bei t = 0,25s gerade eine halbe Schwingung vorüber, der Körper befindet sich wieder in der Mitte bewegt sich aber in die entgegengesetzte Richtung (negatives v).
Bei t = 0,3 s befindet sich der Körper genauso weit links von der Mitte wie bei t = 0,2 s rechts davon. Dabei schwingt er nach links v ist gleich gross und beide Male negativ. Bei t = 0,375 s ist eine 3/4 Schwingung vorbei, d. h. der Körper befindet sich im linken Umkehrpunkt.

b) Um von der Ruhelage zum Umkehrpunkt zu gelangen, benötigt der Oszillator eine viertel Periode – also 1/8 Sekunde. Damit werden die

Bewegungsgleichungen für die Auslenkung und die Geschwindigkeit: $y(t)=A\sin\left(\omega\cdot\left(t+\frac{1}{8}s\right)\right)$ und $v(t)=A\omega\cos\left(\omega\cdot\left(t+\frac{1}{8}s\right)\right)$. Setzt man die geforderten Zeiten ein, so erhält man

t = 0:	y(0.1s) = 3.71 cm	v(0.1s) = -1.43 m/s
t = 0.2s:	y(0.2s) = -9.71 cm	v(0.2s) = -0.89 m/s
t = 0.3s:	y(0.3s) = -9.71 cm	v(0.3s) = +0.89 m/s

8) a) Benutzen Sie Ihren Taschenrechner: Geben Sie die Funktion der Auslenkung ein und lassen Sie sie grafisch darstellen. Stellen Sie eine zweite Funktion mit konstantem y = 8 Wert dar. Ermitteln Sie anschliessend den Schnittpunkt. Die Funktion lautet: $y(t)=A\sin(\omega t)=A\cdot\sin(2\pi f\cdot t)=12cm\cdot\sin\left(2\pi\cdot 20\frac{1}{s}\cdot t\right)$. Die gesuchte Lösung ergibt dann t = 0.00581s.
b) 0.0192 s

9) Zur Lösung dieser Aufgabe müssen Sie ihr Wissen aus verschiedenen Kapiteln kombinieren.

a) $E_{ges}=\frac{1}{2}DA^2$
b) Für y' = A ist die potentielle Energie des Gegenstands $E_{pot,G}=-mgA=-0.736\,J$.
c) Bei y' = A ist die potentielle Energie der Feder $E_{pot,F}=\frac{1}{2}DA^2+mgA=1.01\,J$. Beachten Sie, dass gilt $E_{ges}=E_{pot,G}+E_{pot,F}$.
d) Die maximale kinetische Energie ist $\frac{1}{2}mv_{\max}^2=\frac{1}{2}m(\omega A)^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{D}{m}\right)A^2=\frac{1}{2}DA^2=E_{ges}=0.270\,J$.

10) Das Problem kann man als Federpendel betrachten, das in der Mitte des Mondes festgemacht ist. Die Amplitude entspricht dabei dem Mondradius. Die Federkonstante D ist zugänglich über die wirkende rücktreibende Kraft am Umkehrpunkt (Oberfläche): $D=\frac{F}{y}=\frac{mg}{A}$. Setzt man dies in die Formel für die Periodendauer eines Federpendels ein, so bekommt man $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{A}}}=2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$. Einsetzen der gegebenen Werte ergibt T = 6508s. Die Geschwindigkeit beim Durchgang durch das Zentrum ist maximal (Ruhelage). Dies ist der Fall, wenn in $v(t)=A\omega\cos(\omega t)$ der Cosinus gleich eins wird. Die Geschwindigkeit ist dann $v=A\omega=1678\frac{m}{s}$.

11) Das Netz senkt sich etwa um $y=\frac{F}{D}=\frac{mg}{D}=A$ (Hooke'sches Gesetz). Dies kann man wieder in die Gleichung für die Periodendauer eines Federpendels einsetzen und umrechnen in die Frequenz. Man erhält $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}=\frac{\sqrt{\frac{D}{m}}}{2\pi}=\frac{\sqrt{\frac{mg}{Am}}}{2\pi}=\frac{\sqrt{\frac{g}{A}}}{2\pi}=9.1\,Hz$.

12) Ein Kommentar zu Beginn: ja, der Winkel, der sich aus der Aufgabenstellung ergibt ist grösser als 5 °, wodurch die Bewegung dieses Pendels eigentlich nicht mehr harmonisch ist. Wir wollen aber diese Tatsache übergehen. Also, die Amplitude beträgt 12 cm und es handelt sich um ein Fadenpendel der Länge 40 cm. Die Bewegungsgleichungen sind damit

$$y(t)=A\sin(\omega t)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot t\right)=A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$ und

$$v(t)=A\omega\sin(\omega t)=A\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)=A\cdot\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot t\right)=A\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

. Einsetzen von t = 10 s ergibt dann y(10s) = -8.12 cm und v(10s) = 43.77 cm/s.

13) Diese Aufgabe löst sich ganz analog der vorherigen Aufgabe, nur dass jetzt halt die Periode T des Federpendels eingesetzt werden muss. Die Amplitude ist wiederum 12 cm. Für die Bewegungsgleichungen folgt:

$$y(t)=A\sin(\omega t)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}\cdot t\right)=A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right)$$ und

$$v(t)=A\omega\sin(\omega t)=A\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)=A\cdot\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}\cdot t\right)=A\cdot\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right)$$

. Die Resultate sind y(10s) = -7.15 cm und v(10s) = 23.61 cm/s.

14) Die Amplitude ist A = 25 cm und T = 2.8 s.

a) Die Fadenlänge ergibt sich aus $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Rightarrow l=\frac{gT^2}{4\pi^2}=1.95\,m$.

b) $y(t)=A\cdot\sin(\omega t)=A\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\left(t+\frac{1}{4}T\right)\right)$. Einsetzen gibt y(0.7s) = 0 cm, y(0.9s) = -10.85 cm.

c) Diese Art eines Pendels ist als Hemmungspendel bekannt. Um die gesuchte Frequenz zu erhalten, ist die Schwingungsdauer einer Schwingung zu bestimmen. Eine Schwingung setzt sich aus zwei halben Schwingungen zusammen: die mit der langen Fadenlänge und die mit der kurzen Fadenlänge. $T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2}$

Mit der Gleichung für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels erhält man dann die Gesamtschwingungsdauer:

$$T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2}+\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_2}{g}}}{2}=\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{l_1}{g}}+\sqrt{\frac{l_2}{g}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{g}}\cdot\left(\sqrt{l_1}+\sqrt{l_2}\right)$$

Mit den gegebenen Werten ist T = 2.267 s. Damit kann nun auch die Frequenz berechnet werden: $f=\frac{1}{T}=0.44\,Hz$.

d) Die Maximalgeschwindigkeit ist bei beiden Schwingungen gleich gross (Energieerhaltung). Damit kann man schreiben $A_1\cdot\omega_1\cdot\cos(\omega_1 t)=A_2\cdot\omega_2\cdot\cos(\omega_2 t)$

$\Rightarrow A_2=\frac{A_1\cdot\omega_1\cdot\cos(\omega_1 t)}{\omega_2\cdot\cos(\omega_2 t)}$, wobei wir die Ruhelage betrachten.

Damit können wir t = 0 setzen (cos(x) maximal) und erhalten für A_2 = 15.5 cm. Nach 1 Sekunde: Das Pendel macht zunächst rechts 1/4 Schwingung, wofür es 0,7 s benötigt, d. h. es schwingt t' =0,3 s nach "links". Damit ist $y(0.3s)=15.5\,cm\cdot\sin\left(3.62\frac{rad}{s}\cdot 0.3s\right)=-13.71\,cm$.

15) Die Amplitude ergibt sich zu A = 4.36 cm. Die Phasenverschiebungen sind –0.41 rad und +0.64 rad.

16) Wird auf Wunsch behandelt!

17) Wird in der Stunde besprochen!