

12 Einführung in die Quantenphysik

12.1 Einleitung

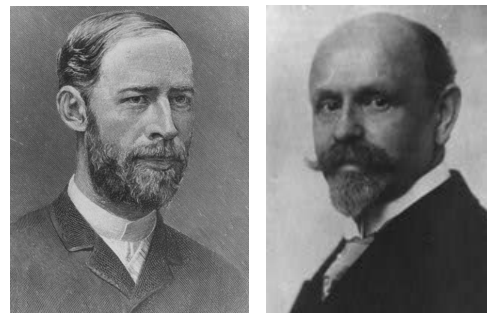
Wir schreiben das Jahr 1887. Gerade etabliert sich die Vorstellung von Licht als elektromagnetische Welle, denn erst 1875 hat Hendrick Antoon Lorentz die entsprechende Theorie dazu formuliert. Vorher betrachtete man Licht zwar auch als Welle, jedoch als mechanische Wellen.

Elektronen waren noch nicht bekannt, die sollten erst im Jahre 1897 durch Joseph John Thomson experimentell nachgewiesen werden. Auch waren weder Protonen noch Neutronen bekannt. Selbst die Atomtheorie wurde von vielen Physikern als reine Hypothese betrachtet, obwohl die Chemiker damit viel erklären konnten. Soviel zur Ausgangslage.

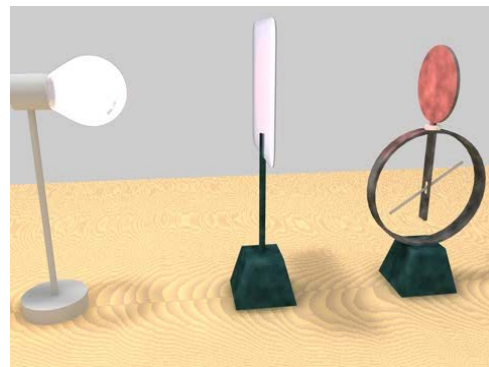
12.2 Photoeffekt erster Teil

Es trug sich im Jahre 1886 zu, dass Heinrich Hertz bei der Entladung einer Elektrode beobachtete, dass die Funkenlänge durch Licht beeinflusst werden kann. 1887 dann führte Wilhelm Hallwachs die Experimente weiter. Er stellte fest, dass UV Strahlung negativ geladene Platten entladen und ungeladene Platten positiv aufladen konnte.

Wiederholt man das Experiment mit dem in der Abbildung gezeigten Versuchsaufbau, so kann man dieses Ergebnis selbst nachvollziehen. Ausserdem stellt man fest, dass man mit "normalem Licht" keine Entladung herbeiführen kann. Eine Glasplatte im Strahlengang einer UV – Lampe verhindert ebenfalls eine Reaktion des Elektroskops. Die nächste Tabelle zeigt eine Zusammenfassung der Resultate.



Heinrich Hertz links (1857-1894) und Wilhelm Hallwachs (1859-1922) Quelle: Wikipedia und www.tu-dresden.de



Aufbau des Experiments zum Photoeffekt: eine Lampe (links) beleuchtet eine Metallplatte auf einem geladenen Elektroskop. Dazwischen kann sich auch noch eine Glasplatte befinden.

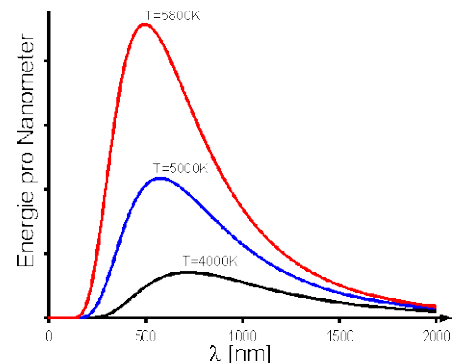
12.3 Schwarzkörperstrahlung



Wilhelm Wien (1864-1928) Quelle: Wikipedia

Verlassen wir den Photoeffekt mal und wenden wir uns einem anderen physikalischen Schauplatz zu. Es geht um schwarze Körper. Dabei handelt es sich um Objekte, welche sämtliche einfallende elektromagnetische Strahlung absorbieren und in Form eines ihrer Temperatur entsprechenden charakteristischen elektromagnetischen Strahlungsspektrum wieder emittieren. Weil bei Raumtemperatur die emittierte Strahlung nicht sichtbar ist, erscheinen solche Körper natürlich schwarz – deshalb der Name.

Weil bei Raumtemperatur die emittierte Strahlung nicht sichtbar ist, erscheinen solche Körper natürlich schwarz – deshalb der Name.



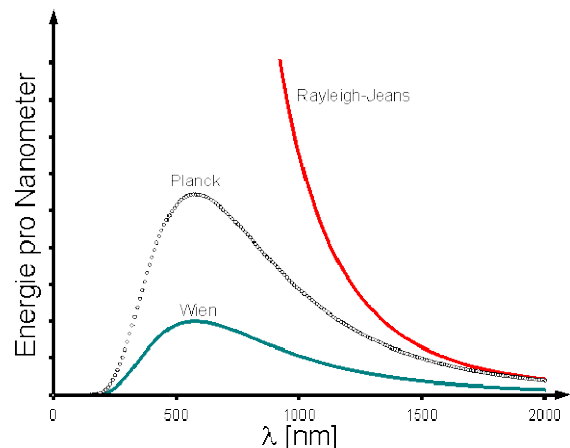
Soweit so gut: dass Körper aufgrund ihrer Temperatur eine charakteristische Strahlung abgeben, hat bereits Gustav Robert Kirchhoff 1859 ausgesagt. Das Problem lag in der Beschreibung des Verlaufs der abgestrahlten Leistung als Funktion der Wellenlänge. Dieser Verlauf ist in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

1896 machte Wilhelm Wien einen ersten Vorschlag zur Beschreibung der von einem schwarzen Körper emittierten Strahlung. Das Wiensche Strahlungsgesetz, wie es heute genannt wird, lautet

$$U(\lambda, T) = \frac{C}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}, \quad (\text{Wiensches Verschiebungsgesetz})$$

wobei $U(\lambda, t)$ die spektrale Leistungsdichte in ($\text{W}/\text{m}^2/\text{m}$) ist und C , respektive c für empirische Konstanten stehen. Wie man der nächsten Abbildung entnehmen kann, stimmt diese Formel nur für ganz kleine Wellenlängen.

1900 veröffentlichte der englische Physiker John William Strutt, 3. Baron Rayleigh, eine weitere Formel, die Licht ins Dunkel bringen sollte:



$$U(\lambda, T) = 8 \cdot \pi \cdot c_0 \cdot k_B \cdot \frac{T}{\lambda^4}$$

Dabei steht c_0 für die Lichtgeschwindigkeit und k_B für die Boltzmann – Konstante. Diese Formel ist falsch, weshalb sie 1905 vom englischen Physiker Sir James Hopwood Jeans korrigiert wurde zu

$$U(\lambda, T) = 2 \cdot \pi \cdot c_0 \cdot k_B \cdot \frac{T}{\lambda^4}. \quad (\text{Rayleigh – Jeans Gesetz})$$

Dies ging als das Rayleigh – Jeans Gesetz in die Geschichte ein. Falsch ist die Formel aber immer noch, wie man der Abbildung entnehmen kann. Sie beschreibt die Zusammenhänge nur bei hohen Wellenlängen richtig.

Am 19. Oktober des Jahres 1900 stellte Max Planck auf der Versammlung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft sein vorläufiges Strahlungsgesetz vor. Es handelte sich um eine Interpolation zwischen dem Strahlungsgesetz von Wien und dem von Rayleigh:

$$U(\lambda, T) = \frac{C}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1}$$



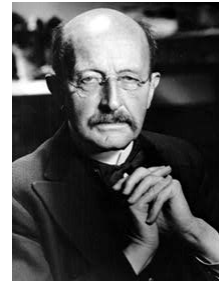
John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842-1919) und Sir James Hopwood Jeans (1877-1946) (vl).
Quelle: Wikipedia

Man beachte, dass Planck – verglichen mit Wien – im Nenner lediglich noch “-1” geschrieben hat! Die empirischen Konstanten hat er vorderhand stehen lassen. Nach

acht Wochen Arbeit hatte er es aber geschafft, die beiden Konstanten durch bekannte Naturkonstanten auszudrücken. Am 14. Dezember 1900 veröffentlichte er die nach ihm benannte Strahlungsformel



$$U(\lambda, T) = \frac{2 \cdot \pi \cdot c_0^2 \cdot h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c_0}{k_B \cdot \lambda \cdot T}} - 1}$$



Max Planck (1858-1947)

Quelle: www.schleswig-holstein.de

Diese Strahlungsformel beschreibt die gemessenen Daten exakt. Die einzige neue Grösse war das "h" (Hilfskonstante) in der Funktion. Dieser unscheinbare Buchstabe hat es hier aber in sich: Zur physikalischen Erklärung des Spektrums eines schwarzen Körpers musste Planck annehmen, dass die Lichtenergie nicht kontinuierlich vom Körper abgegeben wird, sondern in bestimmten Paketen. Die Energie der Quanten, mit denen strahlenden Körper Energie austauschen ist stets ein ganzzahliges Vielfaches der Grösse h. **Diese Idee war revolutionär!** Heute wird dieses h Planck zu Ehren "Plancksches Wirkungsquantum" genannt.

Planck selber hat – und das ist wichtig – nicht gesagt, dass die Strahlung selber gequantelt sei.

12.4 Photoeffekt zweiter Teil

Was hat obige Geschichte nun mit dem Photoeffekt zu tun? Werden wir gleich sehen. Wir befinden uns im Jahre 1902. Inzwischen sind die Elektronen als Ladungsträger beim Photoeffekt identifiziert worden (1899).

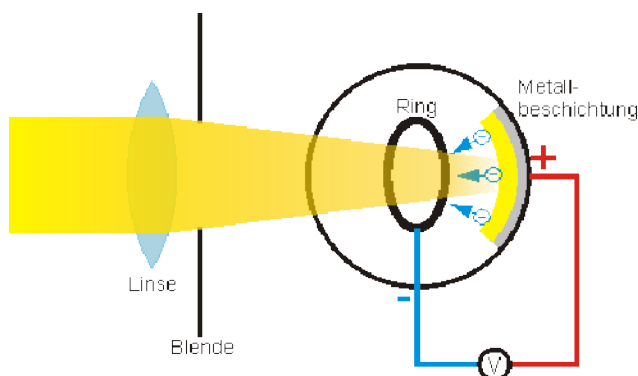
Wir wollen an dieser Stelle ein eigenes Experiment zum Photoeffekt durchführen.



Philipp Eduard Anton (von) Lenard (1862-1947)

Quelle: Wikipedia

Der Versuchsaufbau ist in der nebenstehenden Abbildung schematisch gezeigt:



Schematische Darstellung des Experimentaufbaus zum Photoeffekt

Das Licht fällt im Innern einer Photozelle (Vakuum) auf ein Metall. Dabei hält eine Blende das Licht vom Ring im Innern der Photozelle ab. Zwischen Ring und Metall wird ein Spannungsmesser angebracht. Fällt nun Licht auf das Metall, so werden Elektronen aus dem Metall herausgelöst und landen auf dem Ring, den sie negativ aufladen. So entsteht zwischen Ring und Metall eine Spannung. Bei genügend grosser Spannung haben die Photoelektronen aus dem Metall aber nicht mehr genug kinetische Energie, um zum Ring zu gelangen. Es gilt dann $E_{kin,max} = q \cdot U_{max}$.

Bei genügend grosser Spannung haben die Photoelektronen aus dem Metall aber nicht mehr genug kinetische Energie, um zum Ring zu gelangen. Es gilt dann $E_{kin,max} = q \cdot U_{max}$.

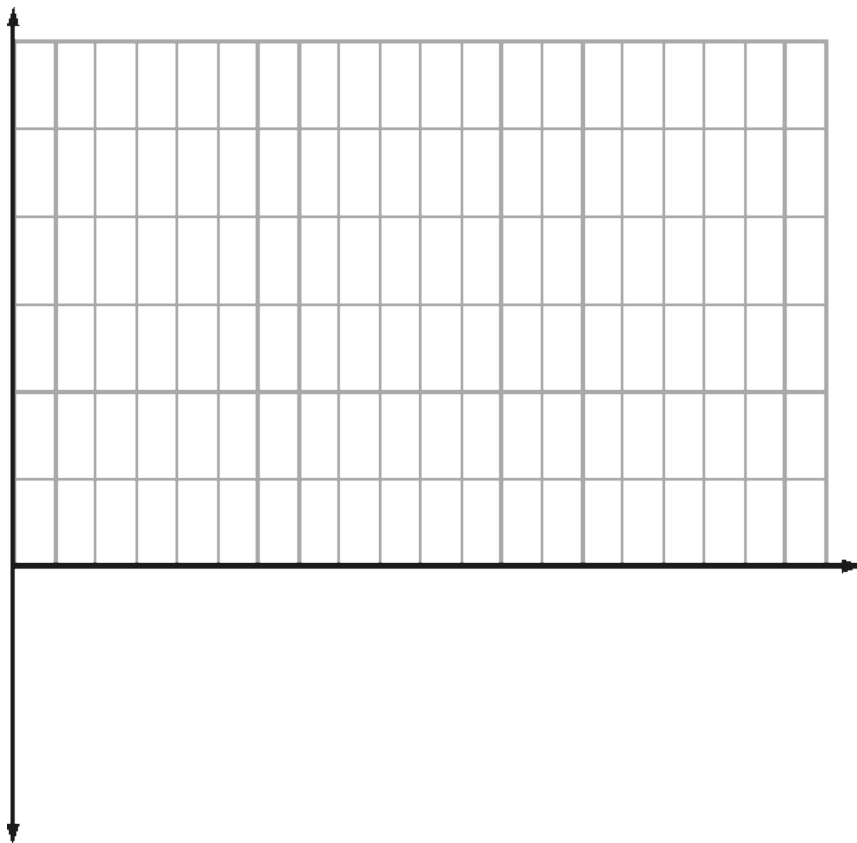
In unserem Fall verwenden wir eine Quecksilberdampf Lampe zur Belichtung. Ihr Licht wird mit Hilfe eines Gitters zusätzlich in seine Spektrallinien aufgespalten, so dass monochromatisches Licht einer bekannten Wellenlänge auf die Photozelle fällt.

Resultate:

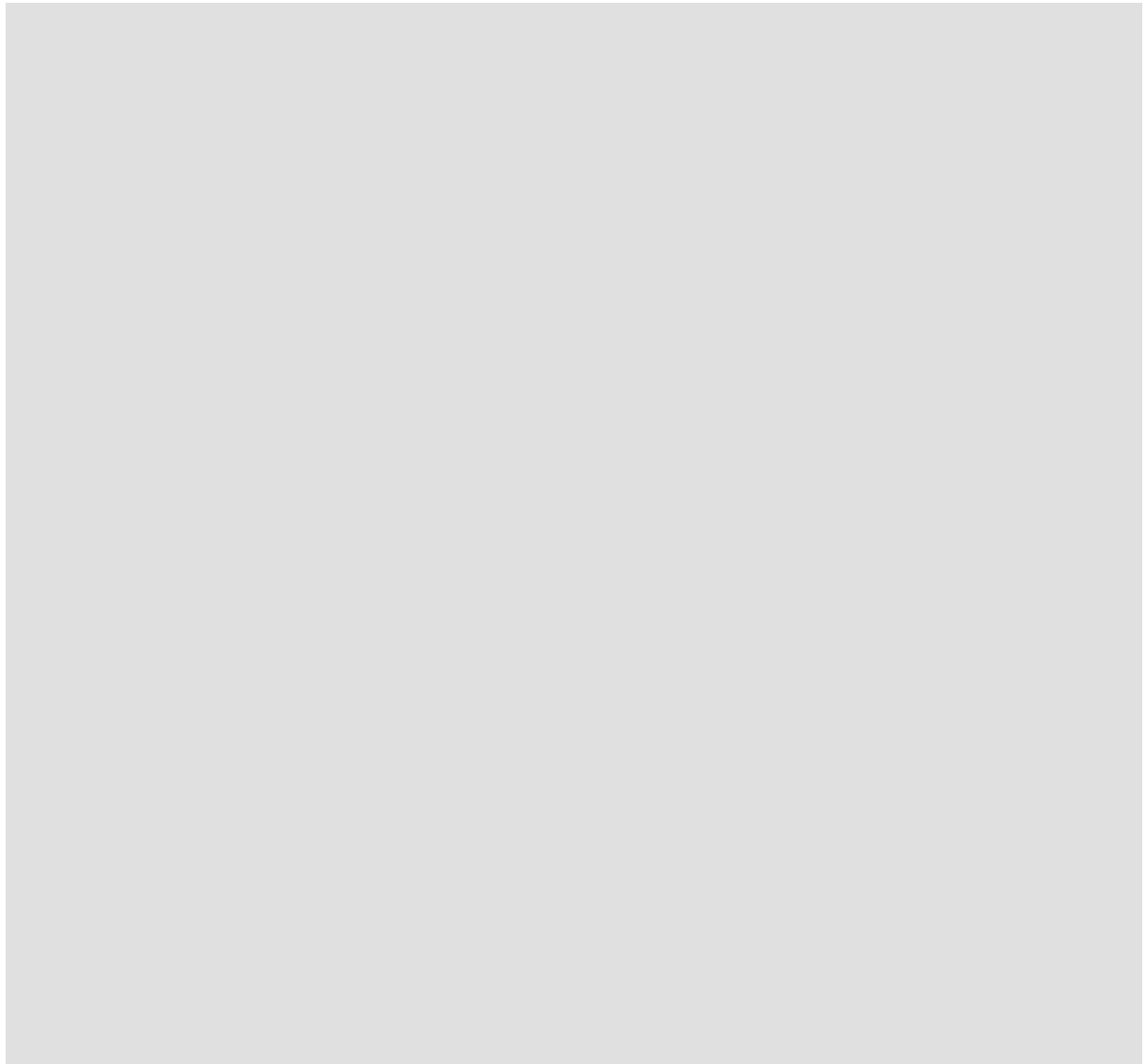
Farbe Hg - Spektrallinie	Wellenlänge [nm]	Frequenz [10^{14} Hz]	U_{\max} [V]	W_{\max} [eV]
orange	579.07	5.2		
orange	576.96	5.2		
grün	546.07	5.5		
blau-violett	435.8	6.9		
violett	404.7	7.4		
UV	365.7	8.2		

Auswertung:

Zur Auswertung tragen wir die maximale Energie der Photoelektronen W_{\max} (in eV) gegen die Frequenz (in 10^{14} Hz) gegeneinander auf.



Analyse und Diskussion



Genau wie wir bemerkte bereits 1902 der deutsche Physiker Philipp Lenard, dass beim Photoeffekt die Lichtintensität des eingestrahlten Lichtes keinen Einfluss auf die Energie der abgestrahlten Elektronen hat.

Dies ist seltsam, sollte doch aufgrund der Wellennatur des Lichtes mehr Energie auf die Elektronen übertragen werden, wenn die Intensität des Lichtes – also die Amplitude der Lichtwelle – zunimmt.

Erst Albert Einstein konnte den Effekt 1905 in seinem Werk "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" (Annalen der Physik, **17**, 132 (1905)) erklären. Er schlug vor, dass nicht die Energie quantelt ist, sondern sogar das Licht selber! Dies war ihm aber nur möglich, weil Max Planck zur Erklärung des Spektrums eines schwarzen Körpers ja bekanntermassen bereits eine Quantelung der Energie angenommen hatte. Ironischerweise lehnte gerade Planck zu Beginn die Theorie von Lichtquanten vehement ab!

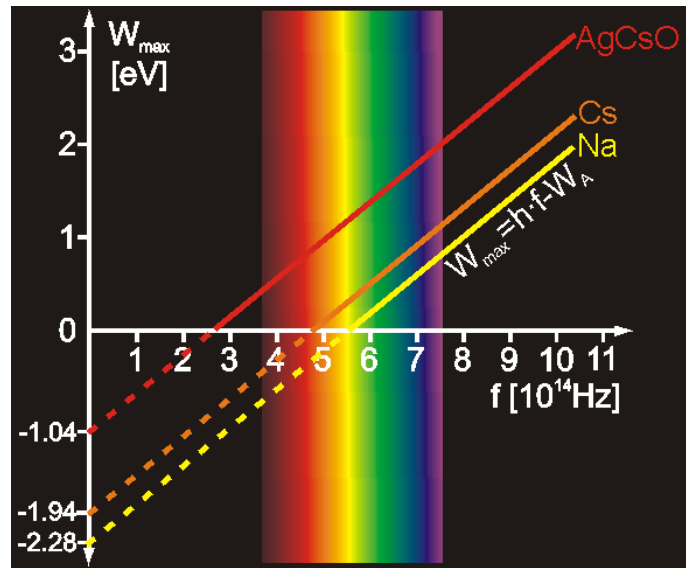
Zusammenfassung:

Beim Photoeffekt treffen Lichtquanten auf Metallelektronen und übertragen diesen einen Teil ihrer Energie. Ist dieser Energieübertrag grösser als die Austrittsarbeit W_A , so können die entsprechenden Elektronen aus dem Metall austreten. Die Austrittsarbeit hängt vom verwendeten Kathodenmaterial ab und ist charakteristisch für ein Metall.

Die Energie der abgelösten Elektronen ist unabhängig von der Lichtintensität und hängt nur von der Frequenz f des einfallenden Lichts über $E = h \cdot f$ zusammen.

Die Konstante h wird dabei als "Plancksches Wirkumsquantum" bezeichnet und hat den Wert $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

Als Schluss folgt, dass die Energie von Licht in einzelne Quanten aufgeteilt ist – diese Energieportionen nennt man Photonen. Obwohl diese Bezeichnung eine klassische Teilchenvorstellung nahe legt, will sie lediglich nur sagen, dass die Energieportion $h \cdot f$ der Lichtwelle unteilbar ist.



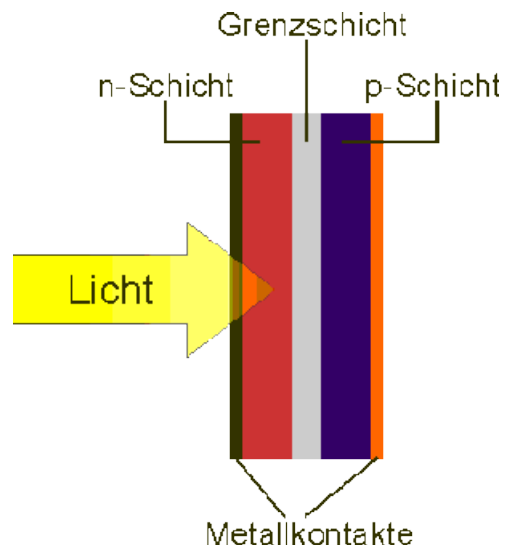
12.5 Innerer Photoeffekt

Wenn man einen Halbleiter mit Licht geeigneter Wellenlänge bestrahlt, so werden Elektronen aus ihrer festen Bindung mit Atomen gelöst. Dadurch steigt die Leitfähigkeit des Halbleiters. In diesem Fall spricht man vom inneren Photoeffekt, weil dadurch die betroffenen Elektronen nur aus der Bindung herausgelöst werden, nicht aber aus dem Material selbst.

Man nutzt diesen Effekt z.B. in der Photometrie in Luxmetern: Licht kann Elektronen aus Silizium herauslösen, wodurch diese vom Valenz- in das Leitungsband angehoben werden. Die Leitfähigkeit stellt nun ein Mass für die Beleuchtungsstärke dar.

In Solarzellen wird auf diese Weise direkt Lichtenergie in elektrische Energie umgewandelt.

Aber auch Leuchtdioden funktionieren dank dem Photoeffekt – allerdings "umgekehrt". Die Elektronen des elektrischen Stromes werden kurzfristig von den Atomen des Materials festgehalten und geben dadurch ihre Energie mit Hilfe von Photonen ab.



12.6 Masse und Impuls der Photonen

Die von Einstein ebenfalls 1905 veröffentlichte spezielle Relativitätstheorie ermöglicht eine verblüffende Erweiterung der bisherigen Resultate. Gemäss Einstein kann jeder Energie gemäss $E = m \cdot c^2$ auch eine Masse zugeordnet werden. Kombiniert man das mit dem Ergebnis aus dem Photoeffekt, dass ein Lichtquant die Energie $E = h \cdot f$ besitzt, so bekommt man für die Masse eines Photons $m = \frac{hf}{c^2}$.

Aber aufgepasst: diese Masse hat das Photon nur im Flug, denn ein Photon kann nur bei Lichtgeschwindigkeit existieren!

Im Jahre 1916 erweiterte Albert Einstein seine Lichtquantenhypothese, indem er für ein Photon auch einen linearen Impuls formulierte. Aus der klassischen Definition für den Impuls eines Teilchens $p = m \cdot v = m \cdot c$ und mit obiger Beziehung für die Masse $m = \frac{hf}{c^2}$ eines Photons, folgt für den Impuls eines Lichtquants sofort

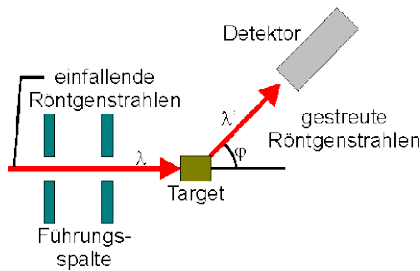


$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Wenn ein Photon auf Materie trifft, wird daher nicht nur Energie übertragen, sondern auch Impuls, wie wenn es sich um einen klassischen Stoss handeln würde.

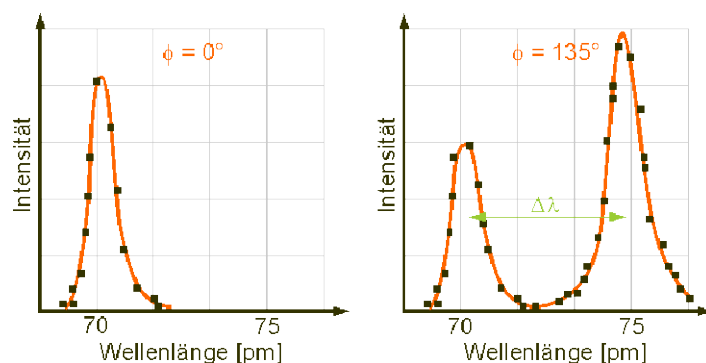
12.6.1 Der Componeffekt

1923 wurde von Arthur Compton ein Experiment durchgeführt, das die Vermutung von Energie- und Impulsübertragung durch Photonen untermauerte. Bei diesem Experiment wurden Röntgenstrahlen mit einer gegebenen Wellenlänge λ auf eine Kohlenstoffprobe geschossen. Registriert wurde nun, unter verschiedenen Winkeln, die Intensität und die Wellenlängen der gestreuten Röntgenstrahlen.



Arthur Holly Compton (1892-1962)
Quelle: nobelprize.org

Die nächste Abbildung zeigt schematisch Comptons Resultate für zwei verschiedene Streuwinkel. Man kann erkennen, dass – obwohl der einfallende Röntgenstrahl nur eine einzige Wellenlänge aufweist, ist in den Spektren für die gestreuten Röntgenstrahlen ein breites Spektrum an Wellenlängen vertreten. Ebenso auffällig sind zwei ausgeprägte Maxima. Eines davon liegt bei derselben Wellenlänge wie der einfallende Röntgenstrahl. Das zweite Maximum verschiebt sich mit grösser werden-



dem Streuwinkel zu grösseren Wellenlängen hin. Zwischen den beiden Maxima liegt die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$, die sogenannte Compton – Verschiebung.

Compton interpretierte die Streuung der Röntgenstrahlung an Kohlenstoff als Energie- und Impulsübertragung zwischen den einfallenden Röntgenstrahlen und den locker gebundenen Elektronen im Kohlenstoff.

Für die Compton – Verschiebung als Funktion des Streuwinkels ϕ erhält man nach ein wenig Mathematik



$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} \cdot (1 - \cos \phi),$$

wobei man die Grösse $\frac{h}{mc}$ als Compton – Wellenlänge bezeichnet. Diese hängt von der Masse des Teilchens ab, welches die einfallenden Strahlen streut. Im vorliegenden Fall haben locker gebundene Elektronen der Kohlenstoffprobe den Röntgenstrahl gestreut, also setzt man für die Masse m die Masse des Elektrons ein.

12.7 Elektronen – neu betrachtet

Im Jahre 1924 stellte der französische Physiker Prinz Louis de Broglie in seiner Doktorarbeit (*“Recherches sur la théorie des Quanta”*) eine Hypothese auf, für deren Gültigkeit es zunächst keinerlei experimentelle Hinweise gab. Wenn Licht Wellen- und Teilcheneigenschaften aufweist, dann trifft dies vielleicht auch für Elektronen zu. Verhalten sich diese Teilchen manchmal wie Wellen? De Broglie vermutete, dass der Zusammenhang



Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987)
Quelle: nobelprize.org

$$E = h \cdot f, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

zwischen den Teilcheneigenschaften E , p und den Welleneigenschaften f , λ nicht nur für Photonen, sondern auch für Elektronen und andere Teilchen zutrifft.

De Broglie konnte mit seiner Hypothese einige Eigenschaften der Atome erklären und schlug auch einen experimentellen Test vor: "Wenn ein Elektronenstrahl eine sehr kleine Öffnung durchquert, so sollten Beugungserscheinungen auftreten."

Wie klein müssen diese Öffnungen sein? Beugungserscheinungen werden dann makroskopisch sichtbar, wenn der Durchmesser d einer Öffnung etwa von der gleichen Grössenordnung wie die Wellenlänge λ ist, die wir aus

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

berechnen können. Die de-Broglie-Wellenlänge von Elektronen λ mit der kinetischen Energie E_k bzw. der Geschwindigkeit v beträgt somit



$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{h}{m_e \cdot v},$$

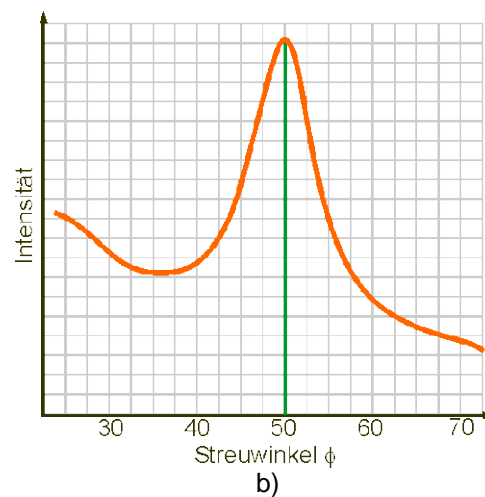
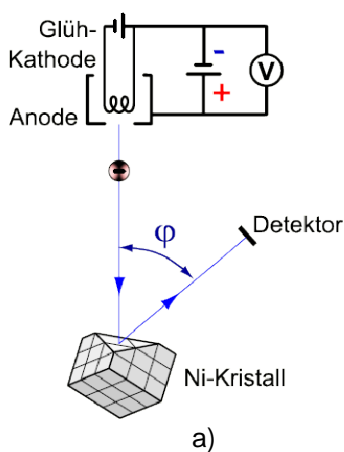
mit $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg. Werden Elektronen durch eine Spannung von einigen Volt beschleunigt, so weisen sie Wellenlängen auf, die mit dem Atomabstand in Kristallen vergleichbar sind. Als Beugungsgitter können somit die Gitterebenen von Kristallen verwendet werden.

12.7.1 Das Davisson – Germer Experiment

Der erste Nachweis der Elektronenbeugung gelang am 6. Januar 1927 Clinton Davisson und Lester Germer in den Laboratorien der Bell Telephone Company in New York. Sie richteten einen Elektronenstrahl auf einen Nickelkristall (Atomabstand $d = 0.215$ nm) und beobachteten unter dem Winkel $\varphi = 50^\circ$ ein Beugungsmaximum erster Ordnung. Die ermittelte Wellenlänge von $\lambda = 0.165$ nm stimmte mit der Vorhersage de Broglies für die verwendete Beschleunigungsspannung von $U = 54$ V überein.



Clinton Joseph Davisson (1881-1956) und Lester Halbert Germer (1896-1971) v.l.
Quelle: Wikipedia



Versuchsaufbau von Davisson und Germer (a) und schematische Darstellung der Resultate (b). Deutlich ist in (b) das Beugungsmaximum 1. Ordnung bei einem Streuwinkel von 50° zu erkennen. *Quelle a):* www.pctheory.uni-ulm.de

1937 erhielt Davisson den Nobelpreis für Physik für die Entdeckung der Beugung von Elektronen an Kristallen, zusammen mit George Paget Thomson, der die Existenz von Materiewellen im gleichen Jahr, aber unabhängig von Davisson und Germer, nachgewiesen hatte.

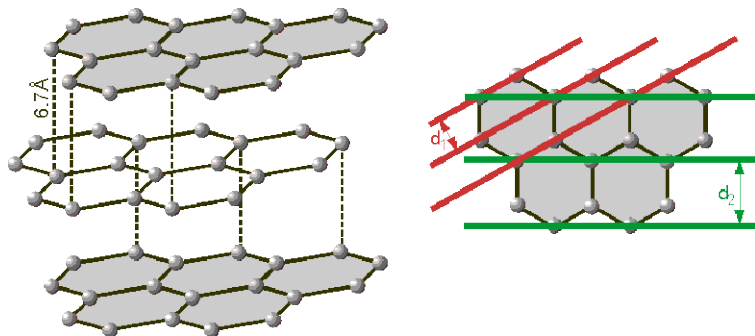


George Paget Thomson (1892-1975)
Quelle: www.nobelprize.org

12.7.1.1 Theoretische Auswertung des Resultats

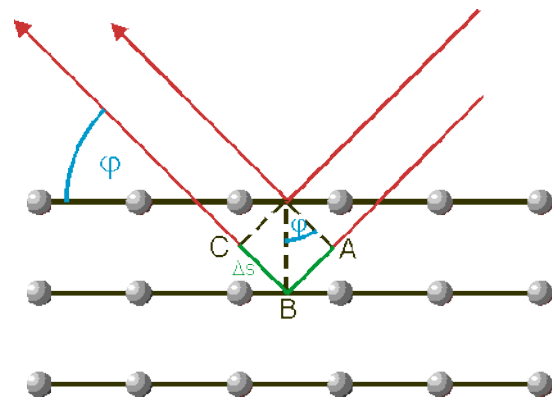
Wir wollen nun die Ergebnisse dieses Experiments nachvollziehen. Wie kommt es zu dem beobachteten Maximum bei einem Streuwinkel von 50° ? Nur unter einem ganz bestimmten Winkel, dem Glanzwinkel ϑ , kann man also reflektierte Elektronen nachweisen. Dies lässt sich mit der Theorie von einem Elektron als Teilchen nicht erklären, sondern nur mit der Interferenz von Materiewellen. Betrachten wir deshalb für unsere Auswertung mal die Elektronen als Wellen, sogenannte Materiewellen.

Ein Kristall lässt sich als regelmässige Anordnung von Atomen verstehen. Innerhalb dieser Betrachtung kann man einen Kristall auch in sogenannte Netz- oder Gitterebenen aufteilen. In der nebenstehenden Abbildung ist das Gitter für Graphit schematisch dargestellt.



Dreidimensionale Darstellung des Graphitgitters mit hervorgehobener Schichtstruktur. Rechts daneben eine Aufsicht auf eine Schicht, mit Visualisierung der Netzebenen. Die Schichtabstände betragen $d_1=123\text{pm}$ und $d_2=213\text{pm}$.

Richtet man einen Elektronenstrahl unter verschiedenen Einfallswinkel auf einen dünnen Kristall, so durchdringt er diesen fast immer. Dabei werden die einfallenden Elektronen am Kristall elastisch gestreut oder reflektiert. Die von benachbarten Ebenen gestreuten Elektronen können miteinander interferieren. Dies ist in der nächsten Abbildung schematisch dargestellt. Dabei stehen die roten Linien für Richtung der einfallenden, respektive gestreuten Elektronen.



Wie man der Abbildung sehr leicht entnehmen kann, tritt ein Interferenzmaximum dort auf, wo zwei Materiewellen, die an benachbarten Gitterebenen reflektiert werden, den Gangunterschied $\Delta s = n \cdot \lambda$ haben ($n = 1, 2, 3, \dots$).

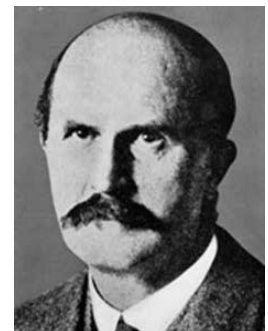
In der Zeichnung ist der zusätzliche Weg Δs , den ein an der unteren Gitterebene reflektiertes Elektron zurücklegen muss, fett gezeichnet. Dem Dreieck entnehmen wir:

$$\sin \varphi = \frac{1/2 \Delta s}{d} = \frac{\Delta s}{2d} \Rightarrow \Delta s = 2d \sin \varphi$$

Ersetzt man den Gangunterschied noch nach $\Delta s = n \cdot \lambda$, so erhält man die berühmte Braggsche Beziehung:



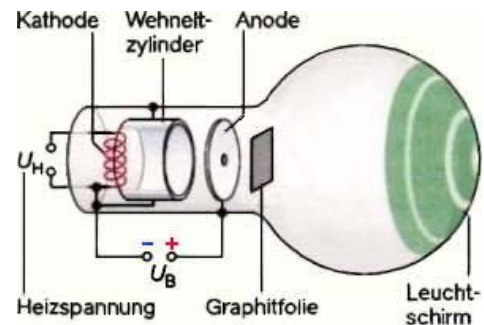
$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \varphi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



William Henry Bragg (1862-1942).
Quelle: Wikipedia

12.7.1.2 Die Elektronenbeugungsröhre im Schulversuch

Die meisten Schulen verfügen nicht über die technische Ausstattung, eine Richtungsabhängige Intensitätsmessung eines an einer Probe gestreuten Elektronenstrahls durchzuführen. In Schulen verwendet man deshalb für das Experiment meistens eine Elektronenbeugungsröhre mit polykristalliner Graphitprobe. Das Prinzip ist einfach: Elektronen dampfen aus dem Heizdraht aus und werden über die Beschleunigungsspannung U_B beschleunigt. Diese treffen auf eine Graphitfolie und werden an den Kristallebenen entsprechend der Bragg-Reflexion gebeugt. Auf dem Schirm entsteht ein Interferenzmuster (Helle Ringe).



Schematische Darstellung einer Elektronenbeugungsröhre.

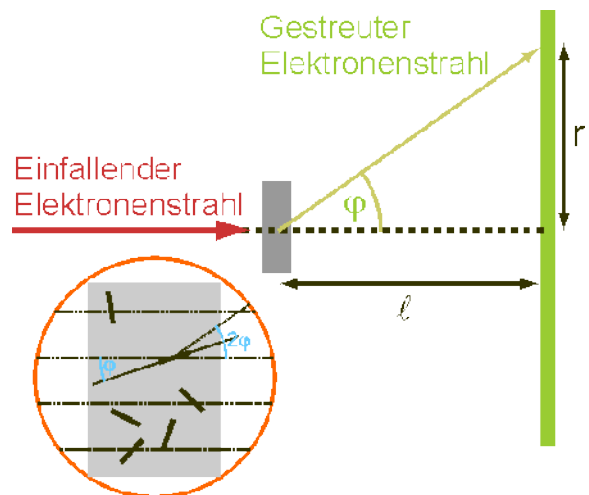
Quelle: www.pctheory.uni-ulm.de

Die verwendete Graphitfolie ist polykristallin, besteht also aus Milliarden kleinster Kristalle, von denen statistisch gesehen immer genug die Braggsche Beziehung beim Beschuss der Probe mit einem Elektronenstrahl erfüllen. Dies ist schematisch in der nächsten Abbildung gezeigt.

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Ablenkwinkel doppelt so gross wie der Glanzwinkel. Er lässt sich aus dem Schirmabstand l und der Ablenkung r berechnen:

$$\tan(2\varphi) = \frac{r}{l}$$

An anderen Kristallen der Folie werden Elektronen um den gleichen Winkel in andere Richtungen abgelenkt. Deshalb erscheint auf dem Fluoreszenzschirm das Interferenzmuster als Kreisring mit Radius r , wie dargestellt.



Beugungsbild eines Elektronenstrahls an Graphit.

Quelle: www.cip.physik.uni-muenchen.de

12.8 Die Schrödinger – Gleichung

Wenn sich Teilchen als Welle ausbreiten können – so genannten Materiewellen – dann muss man diese Wellen auch durch eine mathematische Funktion beschreiben können. Die allgemeinste Variante dieser Wellenfunktion schreibt man $\Psi(x, y, z, t)$. Diese Funktion wird normalerweise eher komplizierter Natur sein, transportiert eine Materiewelle ja schliesslich nebst Energie und Impuls auch Masse und oft auch noch Ladung. Es gibt in der Physik verschiedene Möglichkeiten für die Funktion einer Materiewelle. Wir wollen hier nur Fälle betrachten, bei denen sich die Raum- von den Zeitvariablen trennen lassen:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}$$

Dabei ist ω die Kreisfrequenz der Materiewelle. Die Funktion Ψ stellt dabei nur den ortsabhängigen Teil der eigentlich zeitabhängigen Wellenfunktion Ψ dar. Was kann man damit nun anfangen? Nun, die Funktion Ψ beschreibt eine Wahrscheinlichkeitswelle. Oder anders: die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen in einem Detektor zu einem bestimmten Zeitpunkt nachgewiesen werden kann ist proportional zu $|\Psi|^2$. Dies nennt man die Wahrscheinlichkeitsdichte und nur diese hat eine physikalische Bedeutung (nicht Ψ selber).



Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen an einem Ort im Raum zu einem gewissen Zeitpunkt nachzuweisen, ist proportional zu $|\Psi|^2$ an diesem Raumpunkt.

Wie erhält man aber die Wellenfunktion? Für Materiewellen hat Erwin Schrödinger 1926 die Lösung gefunden. Für dreidimensionale Systeme lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \cdot \nabla^2 \Psi + U\Psi = E\Psi,$$

wobei ∇^2 das Quadrat des sogenannten Nabla-Operators ∇ ist. Man schreibt dafür häufig auch

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$



Erwin Schrödinger
(1887-1961)
Quelle: unbekannt

Allgemein schreibt man die Schrödinger – Gleichung in der Form

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \text{ mit } \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta + U$$

wobei \hat{H} der Hamilton-Operator des Systems ist.

In vielen Fällen bewegt sich eine Materiewelle einfach in x –Richtung und es wirken Kräfte auf das Teilchen, welche wir als Potential $U(x)$ zusammenfassen. In diesem Fall lautet die zeitunabhängige Schrödinger Gleichung für das Teilchen

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + U\Psi = E\Psi$$

Dies ist die eindimensionale stationäre Schrödinger Gleichung. Wirken keine Kräfte auf das Teilchen, so ist $U(x) = 0$ und die Gleichung beschreibt dann ein freies Teilchen. Die Schrödinger Gleichung vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi .$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung ist $\Psi = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$, mit $k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{\hbar^2}}$. Man erinnere sich an die Wellengleichung einer harmonischen Welle in der Mechanik: $\cos kx$ respektive $\sin kx$ beschreibt eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Das im vorliegenden Fall betrachtete Teilchen besitzt nur kinetische Energie

($U=0$). Es ist daher $E = \frac{p^2}{2m}$. Ausserdem gilt aber auch $E = \frac{k^2 \hbar^2}{8\pi^2 m}$ und deshalb ebenfalls



$$p = \sqrt{\frac{2mk^2\hbar^2}{8\pi^2 m}} = k \frac{\hbar}{2\pi} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\hbar}{2\pi} = \frac{\hbar}{\lambda} !$$

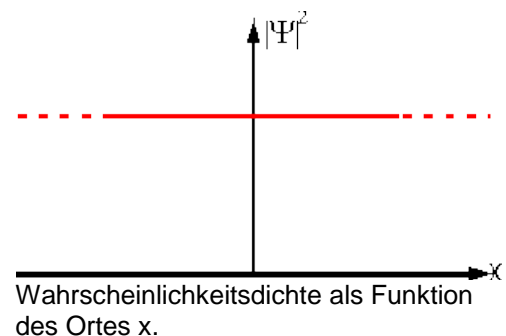
Das ist aber gerade die schon bekannte deBroglie Beziehung! Die Schrödingergleichung liefert also bei frei beweglichen Teilchen eine Aussage, die 1927 durch das Experiment von Davisson und Germer bestätigt worden ist!

Für den Fall, dass $U \neq 0$ ist, bleiben die obigen Lösungen die gleichen, allerdings

jetzt mit $k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m (E - U)}{\hbar^2}}$.

12.8.1 Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$

Wie wir bereits bemerkt haben, entspricht das Quadrat der Wellenfunktion $|\Psi|^2$ der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens an einem Ort. Nehmen wir noch einmal die allgemeine Lösung der eindimensionalen, zeitunabhängigen Schrödingergleichung $\Psi = \Psi_0 \cdot e^{ikx}$ zur Hand. Darin wurde lediglich die Konstante Ψ_0 hinzugefügt. Berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeitsdichte:



$$|\Psi|^2 = |\Psi_0 \cdot e^{ikx}|^2 = \Psi_0^2 \cdot |e^{ikx}|^2 = \Psi_0^2 \cdot e^{ikx} \cdot e^{ikx*} = \Psi_0^2 .$$

Die letzte Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$ als Funktion des Ortes. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist für jeden Ort dieselbe – das Teilchen ist an jedem Ort mit gleicher Wahrscheinlichkeit!

12.9 Die heisenbergsche Unschärferelation

Die letzte Abbildung hat weit reichende Konsequenzen! Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte haben wir angenommen, dass k , und somit der Impuls der betrachteten Welle exakt bekannt ist. Dann ist es aber offenbar unmöglich, eine Aussage über den Aufenthaltsort des Teilchens zu machen!

Der Physiker Werner Heisenberg hat diese Tatsache 1927 mit seiner berühmten Unbestimmtheitsrelation dargestellt. Sie lautet für eine Dimension



Werner Heisenberg (1901-1976).
Quelle: Wikipedia



$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{h}{2}$$

und analog auch für die anderen zwei Dimensionen y und z . Dies heisst nichts anderes, als:



es wird nie möglich sein, Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig exakt zu bestimmen! Das Produkt aus Orts- und Impulsunschärfe ist stets gleich oder grösser $\frac{h}{4\pi} = \frac{h}{2}$!

12.10 Der Tunneleffekt

Nach der klassischen Physik wird ein Teilchen, dessen kinetische Energie kleiner ist als eine Potentialschwelle, von dieser reflektiert. Ein Beispiel: Wenn Sie einen Fussball (Teilchen) gegen eine stabile Wand (Potentialschwelle) spielen, so kommt dieser wieder zurück.

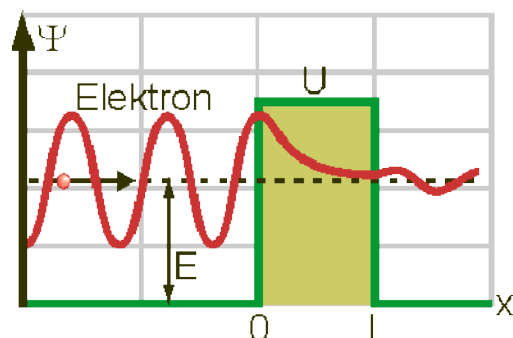
Nach den Gesetzen der Quantenphysik kann ein Teilchen aber mit einer nicht verschwindenden Wahrscheinlichkeit durch eine Potentialschwelle hindurch **tunneln**. Das würde dem klassischen Bild entsprechen, dass Sie der oben schon erwähnte Fussball plötzlich nicht mehr zurückkäme sondern auf der anderen Seite der Wand wieder auftauchen würde.

Die Tunnelwahrscheinlichkeit wird durch den so genannten Transmissionskoeffizienten gegeben. Ein Transmissionskoeffizient $T = 0.030$ besagt, dass von 1000 Teilchen 30 die Barriere durchtunneln und 970 reflektiert werden. Der Transmissionskoeffizient kann man näherungsweise wie folgt beschreiben:

Die Tunnelwahrscheinlichkeit wird durch den so genannten Transmissionskoeffizienten gegeben. Ein Transmissionskoeffizient $T = 0.030$ besagt, dass von 1000 Teilchen 30 die Barriere durchtunneln und 970 reflektiert werden. Der Transmissionskoeffizient kann man näherungsweise wie folgt beschreiben:

$$T \approx e^{-2 \cdot \left(\sqrt{\frac{2m(U-E)}{h^2}} \right) \cdot L}$$

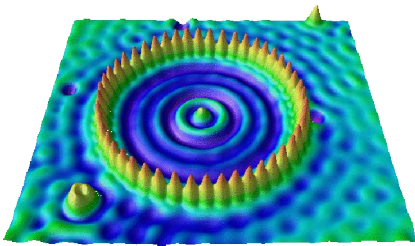
wobei L die Dicke der Potentialschwelle darstellt, U für die Höhe der Schwelle steht und E die kinetische Energie des Teilchens mit der Masse m ist.



Problem Mit welcher kinetischen Energie muss ein Elektron auf eine Potentialschwelle mit einer Höhe von $U = 6\text{eV}$ und einer Dicke von $L = 0.70\text{ nm}$ geschossen werden, damit es einen Transmissionskoeffizienten von $T = 0.0010$ hat?

12.10.1 Das Rastertunnelmikroskop

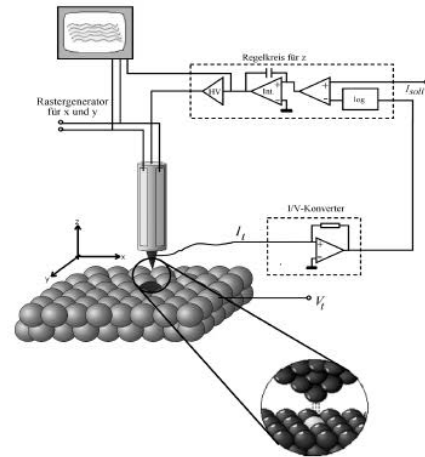
Beim Rastertunnelmikroskop bringt man eine Metallspitze nahe an die zu untersuchende Oberfläche und legt eine kleine Spannung von etwa 10 mV zwischen Probe und Metallspitze an. Der Abstand der Metallspitze zur Oberfläche stellt dabei für die in der Oberfläche sitzenden Elektronen eine Potentialschwelle dar. Wird der Abstand gering genug (keine Berührung!), so können einige Elektronen durch diese Schwelle hindurchtunneln und so den **Tunnelstrom** erzeugen.



Fe – Atome auf einer Ni – Oberfläche.
Quelle: IBM

Normalerweise versucht man, diesen Tunnelstrom während des

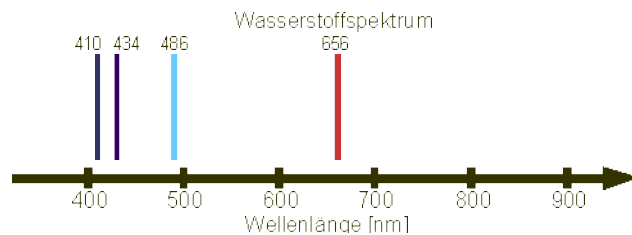
Abfahrens der Oberfläche konstant zu halten. Dadurch bleibt aber auch der Abstand der Metallspitze zur Oberfläche konstant und es entsteht so schliesslich eine Karte der Oberfläche, die man untersucht.



Funktionsweise eines RTM.
Quelle: www.physik.uni-essen.de

12.11 Atomspektren

Bevor die Quantentheorie entwickelt wurde, konnte die Physik auch eine andere Erscheinung nicht erklären. Es war die Tatsache, dass Spektren von Atomen eine Ansammlung von diskreten Linien darstellten und nicht eine kontinuierliche Emission oder Absorption von Licht zugrunde lag. Das Spektrum von Wasserstoff war bei weitem das einfachste. Bereits 1885 hatte der schweizer Gymnasiallehrer Johann Jakob Balmer erkannt, dass man den sichtbaren Anteil des Wasserstoffspektrums durch eine Formel darstellen konnte, welche nur ganzzahlige Variablen enthält. Sein erkannter Zusammenhang ist heute als Balmer-Formel bekannt:



$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Dabei ist $R_H = 1.0974 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ die Rydberg Konstante für Wasserstoff und n eine ganze Zahl grösser gleich 3. 1888 erweiterten der schwedische Physiker Janne Rydberg und der schweizer Physiker Walter Ritz die Formel zur Rydberg – Ritz Formel zur Berechnung des Wasserstoffspektrums:



$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Dabei sind n_1 und n_2 beliebige ganze positive Zahlen, wobei $n_1 < n_2$ ist. 1908 veröffentlichte Ritz dann das nach ihm benannte Ritzsche Kombinationsprinzip. Danach ist die Summe oder die Differenz der Frequenzen zweier Spektrallinien häufig wieder die Frequenz einer weiteren Spektrallinie.

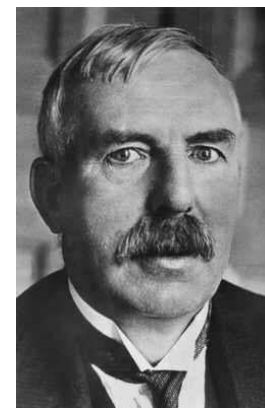
Die vorhergehenden Arbeiten haben die Komplexität der Erklärung von Atomspektren massiv vereinfacht. Da die Atomspektren selber mit dem Aufbau der entsprechenden Atome verknüpft sind, musste man nun nur noch ein geeignetes Atommodell finden.

12.11.1 Das rutherford'sche Atommodell

1911 konnte der Experimentalphysiker Ernest Rutherford durch die Auswertung seines berühmten Streuversuchs erstmals begründete Aussagen über die Struktur des Atoms machen.

Der Versuchsaufbau enthält einen radioaktiven α -Strahler und eine extrem dünne Goldfolie, die sich in einer Vakuumkammer befinden. Die von dem Strahler emittierten α -Teilchen werden an der Goldfolie gestreut und treffen anschliessend auf einen Szintillationsschirm, wo sie kleine Lichtblitze hervorrufen. Diese können mit einem Mikroskop beobachtet werden.

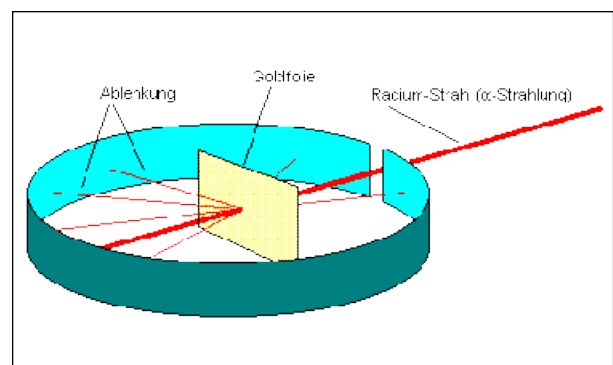
Man zählt für jeden Streuwinkel ϑ zwischen 0° und 180° die jeweils eintreffenden α -Teilchen.



Ernest Rutherford 1908
(1871-1937)
Quelle: Wikipedia

α -Teilchen (He-Kerne) sind zweifach positiv geladen und wesentlich schwerer als Elektronen. Rutherford ging – entsprechend dem verbreiteten thomson'schen Atommodell - zunächst davon aus, dass im Goldatom die positive Ladung gleichmässig verteilt und deshalb deren elektrische Abstossungskraft auf ein α -Teilchen nirgends sehr hoch sei.

Auch die leichten Elektronen, die er "wie Rosinen im Teig" der positiven Ladung eingebettet wähnte, können die α -Teilchen nicht beeinflussen. Deshalb erwartete er, dass die α -Teilchen durch die Goldatome nicht wesentlich aus ihrer Richtung abgelenkt würden.



Versuchsanordnung für Rutherford's Streuversuche
Quelle: www.uniterra.de

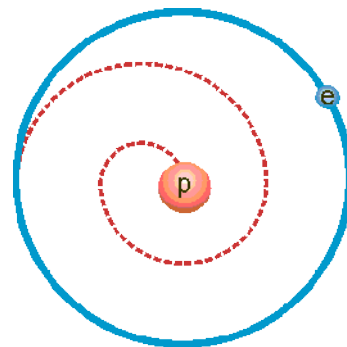
Und tatsächlich durchdringen die meisten α -Teilchen die Goldfolie ohne Ablenkung. Zur Überraschung Rutherford's gibt es aber auch welche, die um grosse Winkel ϑ , vereinzelt sogar bis zu 180° , gestreut werden.

Dies kann nur so erklärt werden: Ein solches α -Teilchen ist auf eine positiv geladene Masse gestossen, welche auf ein Gebiet konzentriert ist, das sehr viel kleiner ist als das Atom. Somit ergibt sich:

- Ø Im Atomkern, dessen Durchmesser nur rund $\frac{1}{100'000}$ des Atomdurchmesser beträgt, sind die positive Ladung und nahezu die gesamte Masse des Atoms konzentriert.
- Ø Die verglichen mit dem Kern fast masselosen Elektronen bilden die **Atomhülle**. Sie sind negativ geladen und umkreisen wegen der elektrischen Anziehungskraft den Kern, so wie die Planeten die Sonne wegen der Gravitationskraft.

Obwohl es die Streuung von α -Teilchen an einer Goldfolie gut erklärt, steckt dieses Modell doch noch voller Widersprüche:

- Ø Ein Elektron auf einer Kreisbahn wird ständig zum Mittelpunkt des Kreises hin beschleunigt. Vom schwingenden Dipol her weiss man, dass eine beschleunigte Ladung eine elektromagnetische Welle abstrahlt. Das Elektron müsste somit dauernd Energie verlieren. Es könnte sich gar nicht auf der Kreisbahn halten, es müsste auf einer Spiralbahn in den Kern stürzen. Atome sind aber stabil. Das ist mit diesem Modell nicht zu verstehen.



- Ø Auf der Spiralbahn um den Kern würde sich die Umlauffrequenz immer mehr erhöhen. Also würde auch die Frequenz der abgestrahlten elektromagnetischen Welle zunehmen und somit ein kontinuierliches Spektrum erzeugt. In Wirklichkeit sendet ein leuchtendes atomares Gas aber ein Linienspektrum aus, das nur aus einzelnen, deutlich voneinander unterschiedenen Frequenzen besteht. Das rutherford'sche Modell kann auch dies nicht erklären.

12.11.2 Das bohrsche Atommodell

Der dänische Physiker Nils Bohr (Nobelpreis 1922) machte 1913 einen Versuch, Plancks Quantenhypothese mit der klassischen Physik zu vermählen. Es war nicht das, was wir heute unter Quantenmechanik verstehen, aber es war die erste Synthese von Quantentheorie und Mechanik.

Bohr machte sich zum rutherford'schen Atommodell einige Gedanken. Ihm fiel auf, dass bei einer Berechnungen des Abstandes des Elektrons zum Atomkern, basierend auf dem rutherford'schen Atommodell, keine Grösse mit einer Länge entstehen



Nils Bohr (1885-1962).
Quelle: Wikipedia

konnte. Wie auch, in der klassischen Berechnung kommen lediglich die Elementarladung e , die Masse des Elektrons m_e und die Permeabilität des Vakuums ϵ_0 vor. Aus den Einheiten dieser Grössen lässt sich aber keine Grösse mit der Einheit einer Länge bilden. Um dies zu erreichen, müsste noch eine zusätzliche physikalische Grösse mit der Einheit Js vorhanden sein. Dies entspricht jedoch gerade der Einheit des planckschen Wirkungsquantums h ! Die Kombination $\frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2}$ hat die Dimension einer

Länge und der Betrag beträgt etwa 0.16 nm, was in etwa vergleichbar mit atomaren Abständen ist.

Bohr entwickelte daraufhin sein Atommodell, in dem in einem Atom ein Satz diskreter, stationärer Elektronenkreisbahnen existiert. Sein Modell fusst dabei auf mehreren Postulaten:

- ∅ Das Elektron kreist um den Atomkern auf einer Quantenbahn, die durch einen ganz bestimmten diskreten Energiewert E , gekennzeichnet ist. Es strahlt bei dieser Kreisbewegung keine Energie ab. Für die Bewegung auf einer Quantenbahn gilt eine Quantenbedingung. Das Produkt aus dem Umfang $2\pi \cdot r$ der Kreisbahn und dem Impuls $p = mv$ des Elektrons muss ein ganzzahliges Vielfaches des planckschen Wirkungsquantums h sein, oder $2\pi r \cdot mv = n \cdot h$, wobei $n = 1; 2; 3; \dots$ Quantenzahl heisst.¹
- ∅ Energie wird nur abgestrahlt, wenn ein Elektron von einer Kreisbahn auf eine andere wechselt.
- ∅ Geht das Atom von einem Zustand höherer Energie E_2 in einen Zustand niedrigerer Energie E_1 über, so emittiert es ein Photon der Energie $hf = E_2 - E_1$.

Mit diesem Modell hatte Bohr – obwohl einige Probleme bestanden (s. 12.11.2.2) – einen grossen Wurf gemacht. Wir wollen nun mal einige Dinge mit seinem Modell berechnen. Im Folgenden wollen wir das Wasserstoffatom betrachten – es ist das einfachste aller Atome mit bekanntlich nur einem Proton und einem Elektron.

12.11.2.1 Bestätigungen des bohrschen Atommodells

12.11.2.1.1 Atomgrösse – Radien der Elektronenbahnen

Wie weit ist denn nun das Elektron vom Atomkern entfernt? Nun, auch bei Bohr wird das Elektron durch die Coulombkraft zwischen Elektron und dem Atomkern auf seiner Bahn gehalten. Wir machen den altbekannten Ansatz $F_Z = F_{el}$ oder

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

¹ DeBroglie fand nachträglich eine Erklärung für diese etwas willkürlich erscheinende Quantenbedingung. Den Kreisbahnen des Elektrons entsprechen Materiewellen, die rund um den Kern laufen. Ist der Bahnumfang $2\pi r$ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge $\lambda = h/mv$, so entsteht eine stehende Welle, deren Schwingungsform sich im Lauf der Zeit nicht verändert. Dies zeichnet eine Quantenbahn vor allen anderen denkbaren Kreisbahnen aus! Aus $2\pi r = n \cdot \lambda$ und

$\lambda = \frac{h}{mv}$ folgt $2\pi r = n \cdot \frac{h}{mv}$ also die Quantenbedingung $2\pi r \cdot mv = n \cdot h$.

Aus der Quantenbedingung $2\pi r \cdot mv = n \cdot h$ bekommt man für die Geschwindigkeit $v = \frac{n \cdot h}{2\pi r m_e}$, welche wir in die letzte Formel einsetzen und nach dem Radius r auflösen. Man erhält



$$r = n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{m_e \pi e^2}.$$

Für $n=1$ ergibt dieser Ausdruck $a_0 \approx 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, was als bohrscher Atomradius bekannt ist.

12.11.2.1.2 Atomspektren

Nachdem wir nun die Abstände eines Elektrons vom Atomkern berechnen können, sollte es doch auch möglich sein, die Energien zu berechnen, die frei werden, wenn ein Elektron von Bahn zu Bahn hüpft.

Für die potentielle Energie eines Elektrons im Coulombfeld eines Wasserstoffkerns gilt

$$E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \left(n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \right)} = -\frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 n^2 h^2}.$$

Für die kinetische Energie ergibt sich analog

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r^2 m_e^2} \right).$$

Hier müssen aber offensichtlich noch ein paar Schritte folgen. Wir ersetzen auch hier den Radius mit $r = n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$ und bekommen

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 h^2 e^4 \pi^2 m_e^2}{4\pi^2 m_e n^4 \epsilon_0^2 h^4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^4 m_e}{4\epsilon_0^2 n^2 h^2} \right) = -\frac{1}{2} E_{pot}.$$

Die Energie des Elektrons auf der Bahn n erhalten wir, wenn wir die potentielle und die kinetische Energie zusammenzählen zu

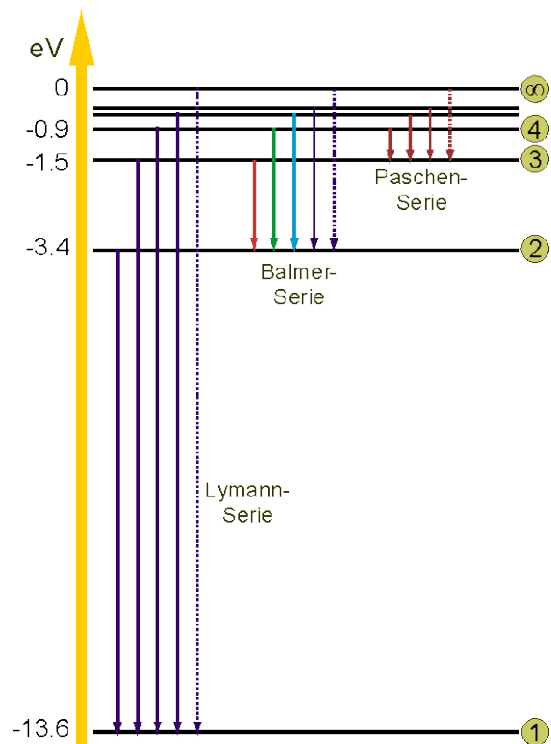
$$E_n = E_{pot} + E_{kin} = E_{pot} - \frac{1}{2} E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2}.$$

Für die Energiedifferenz zweier Elektronenbahnen folgt aus diesem Resultat gleich



$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n_2^2 h^2} + \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n_1^2 h^2} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Dies ist aber gerade die Rydberg – Ritz Formel! Das bohrsche Atommodell erlaubt also eine Erklärung für eine Formel, welche von Rydberg und Ritz 25 Jahre vorher empirisch aus dem Wasserstoffspektrum abgeleitet worden war! Demnach entsprechen die beobachtbaren Wasserstofflinien Elektronenübergängen zwischen Elektronenbahnen mit unterschiedlicher Quantenzahl n . Nach ihren Entdeckern sind verschiedene Übergangsserien unterschiedlich benannt worden. Die Balmer – Serie ist die einzige, welche teilweise sichtbare Übergänge besitzt.



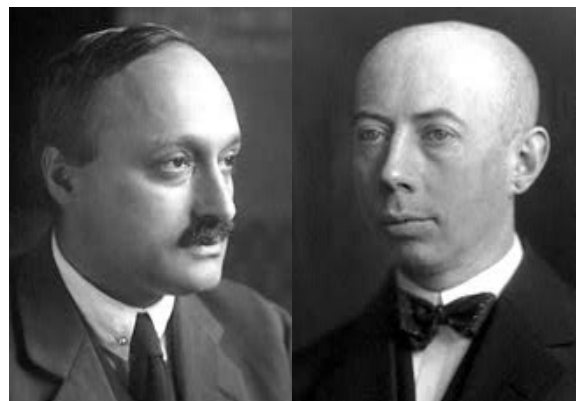
Energienstufen des Wasserstoffatoms. Es sind die nach ihren Entdeckern benannten Übergangsserien eingezeichnet (es fehlen die Brackett- und die Pfund-Serie).

12.11.2.1.3 Der Franck-Hertz Versuch – Eine weitere Bestätigung

Niels Bohr wurde durch das Auftreten optischer Spektrallinien zu seinem Atommodell veranlasst. Atome gehen in einen anderen Energiezustand über, wenn sie ein Photon emittieren oder absorbieren. Das Atom kann das Photon allerdings nur dann absorbieren, wenn es *genau* die zur Energiedifferenz zwischen beiden Zuständen "passende" Energie hat.

Ein wichtiges Experiment, mit dem die Existenz *diskreter Energiezustände* auf andere Weise bestätigt wurde, gelang 1914 James Franck und Gustav Hertz. Atome können nämlich nicht nur Energie von Photonen, sondern auch von Elektronen absorbieren.

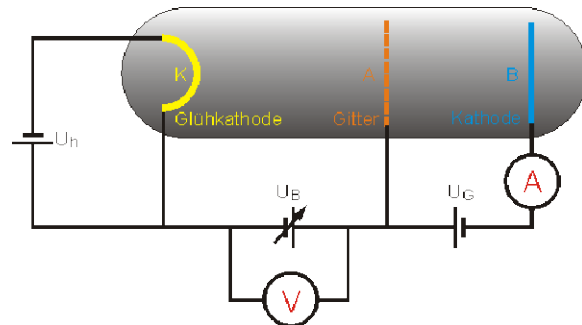
Der Versuch zeigt: Nur wenn das Elektron eine für die Atomart charakteristische Mindestenergie mitbringt, kann es beim Zusammenstoß mit einem Atom Energie an dieses abgeben. Der Stoß versetzt das Atom in einen höheren Energiezustand, der vom Grundzustand durch eine Energiestufe getrennt ist.



James Franck (1882-1964) und Gustav Ludwig Hertz (1887-1975) gewannen 1925 den Nobelpreis für Physik.

Quelle: www.nobelprize.org

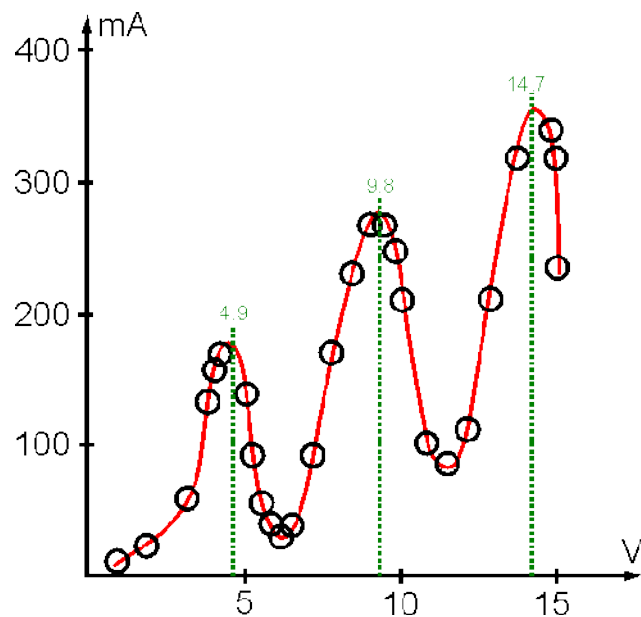
Der Versuchsaufbau enthält einen mit Quecksilberdampf gefüllten Glaskolben, in dem sich drei Elektroden befinden: die Glühkathode K, das Anodengitter A und die Auffängerelektrode B.



Aufbau des Franck – Hertz Versuchs in einer schematischen Darstellung.

Die aus der Glühkathode austretenden Elektronen werden durch die regelbare Spannung U_b bis zum Anodengitter A beschleunigt und müssen anschliessend bis zur Auffängerelektrode B gegen eine geringe Bremsspannung U_G anlaufen.

Man variiert die Beschleunigungsspannung U_b , misst den in der Auffängerelektrode B eintreffenden Elektronenstrom I und erhält den nebenstehend dargestellten Zusammenhang: Wie erklärt sich dieser Verlauf?



Beim Quecksilberatom beträgt die Differenz zwischen der Energie E_0 des Grundzustands und der Energie E_1 des niedrigsten angeregten Zustands $\Delta E = E_1 - E_0 = 4.9 \text{ eV}$.

Bei einer Beschleunigungsspannung unter 4.9 V ist die kinetische Energie der Elektronen geringer als 4.9 eV . Zwischen den Elektronen und den Quecksilberatomen können nur *elastische* Stösse, also Stösse ohne Energieaustausch, stattfinden. Mit zunehmender Spannung U_b erreichen pro Zeiteinheit immer mehr Elektronen das Anodengitter A. Alle besitzen genug Energie, die Bremsspannung U_b , zu überwinden, der Strom I steigt an.

Bei einer Beschleunigungsspannung knapp oberhalb 4.9 V haben die Elektronen unmittelbar vor dem Anodengitter A eine kinetische Energie knapp über 4.9 eV . Dort finden jetzt *inelastische* Stösse statt: Die Elektronen geben 4.9 eV als Anregungsenergie an die Quecksilberatome ab. Mit der ihnen verbleibenden geringen kinetischen Energie können sie nicht mehr gegen die Bremsspannung U_b , anlaufen. Sie fallen für die Strommessung aus. Der Strom I fällt stark ab.

Bei einem weiteren Anstieg der Beschleunigungsspannung deutlich über 4.9 V hinaus erreichen die Elektronen die kinetische Energie 4.9 eV schon immer weiter vor dem Anodengitter. Das Gebiet, in dem die inelastischen Stösse stattfinden, bewegt sich vom Anodengitter A auf die Glühkathode K zu. Zwischen diesem Gebiet und dem Anodengitter werden die beim Stoss abgebremsten Elektronen noch einmal beschleunigt. Der Strom I steigt also wieder an.

Bei einer Beschleunigungsspannung knapp oberhalb 9.8 V können die Elektronen bereits in der Mitte zwischen der Glühkathode K und dem Anodengitter A den ersten inelastischen Stoss durchfahren und dabei 4.9 eV abgeben. Danach werden sie er-

neut beschleunigt und erreichen unmittelbar vor dem Anodengitter noch einmal die kinetische Energie 4.9 eV. Sie können einen zweiten inelastischen Stoss durchführen. Der Strom I fällt deshalb wiederum stark ab.

Ein durch inelastischen Elektronenstoss angeregtes Quecksilberatom kehrt aus dem ersten angeregten Zustand durch Emission eines Photons der Energie $hf = 4.9$ eV in den Grundzustand zurück.

Der Franck – Hertz Versuch bestätigt auf schöne Weise ebenfalls das bohrsche Atommodell, da er nur erklärt werden kann, wenn man davon ausgeht, dass sich Elektronen nur in bestimmten Abständen um den Atomkern aufhalten dürfen.

12.11.2 Probleme des Modells von Bohr

Wir wollen es nicht verschweigen: auch das bohrsche Atommodell hat bereits zur Zeit seiner Veröffentlichung mit Problemen zu kämpfen. Hier nur ein paar davon:

- ∅ Die Postulate lassen sich nicht physikalisch herleiten – ihr Erfolg legitimiert die zugrunde liegenden Annahmen!
- ∅ Das Vorhandensein chemischer Bindungen erklärt das Modell nicht.
- ∅ Bei Atomen mit mehr als einem Elektron kann das Modell die Linienspektren nicht mehr vorhersagen.
- ∅ Die Annahme von scharf definierten Elektronenbahnen widerspricht der heisenbergschen Unschärferelation.

In den folgenden Jahren wurde das bohrsche Atommodell immer wieder angepasst und verfeinert, um seine Unzulänglichkeiten zu kompensieren. Mit dem Aufschwung der Quantenmechanik wurde das Modell aber schlussendlich abgelöst.

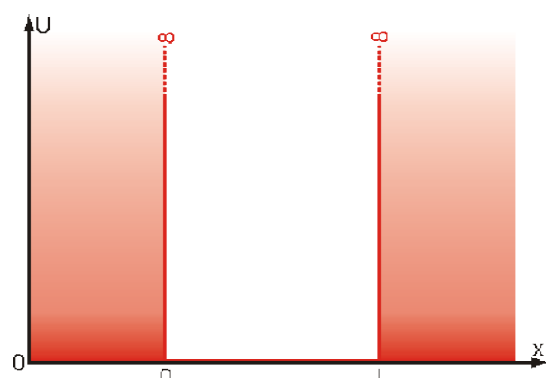
12.12 Die Schrödingergleichung – Anwendungen

Als Abschluss dieser Einführung in die Quantenphysik – wobei wir uns eigentlich bisher nur deren geschichtliche Entwicklung angesehen haben – wollen wir doch noch ein paar Konsequenzen betrachten, die sich durch die Anwendung der Schrödingergleichung ergeben. Sie werden feststellen, dass die an ihre mathematischen Fähigkeiten gestellten Ansprüchen dabei von minimal bis extrem reichen, je nach Problemstellung. Aber alles halb so wild...

12.12.1 Das Elektron in der Falle

In einem ersten Beispiel berauben wir ein Elektron seiner Freiheit und sperren es in einen Kasten, in dem es sich nur nach links oder nach rechts bewegen kann. Solche Elektronenfallen sind technisch zu realisieren. Wir interessieren uns aber im Moment nur für die theoretische Seite.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Verlauf des vom Elektron gesehene Potentials als Funktion des Ortes. An den Orten $x=0$



und $x=L$ soll die Potentialschwelle für das Elektron unendlich hoch sein (entspricht einer unendlich negativ geladenen Wand). Das Elektron wird also nicht in diese Wand eindringen können. Das Elektron befindet sich in einem "Kasten". Es kann sich darin frei bewegen, aber es kann nicht in die "Wände" eindringen. Somit kann man aber die Wellenfunktion für die Bereiche $x<0$ und $x>L$ gerade aufschreiben²

$$\psi = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = L$$

Die Schrödingergleichung für den Bereich innerhalb der Begrenzungen lautet dann

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi .$$

Folgende allgemeine Funktion löst diese Gleichung (sie kennen sie bereits):

$$\psi = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx , \text{ mit } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} .$$

Wir müssen nun nur noch überprüfen, welche Möglichkeiten auf unsere Problemstellung zutreffen. Also, bei $x=0$ folgt $\psi(0)=B$. Die Randbedingung verlangt aber ebenfalls $\psi(0)=0$, wodurch automatisch $B=0$ folgt. Die gesuchte Wellenfunktion hat also die Form

$$\psi = A \cdot \sin kx .$$

Die Amplitude beträgt an der Wand $\psi(L)=A \cdot \sin kL$. Die zweite Randbedingung verlangt aber wieder $\psi(L)=0$. Wir könnten nun einfach $A=0$ setzen, dann wäre aber die Wellenfunktion immer null, was der Situation entsprechen würde, dass das Teilchen gar nicht im Kasten wäre. Wir müssen uns etwas anderes einfallen lassen. Die zweite Möglichkeit die Randbedingung zu erfüllen ist, das Argument des Sinus bei $x=L$ null werden zu lassen. Dies kann man erreichen, wenn man als Werte von kL nur ganzzahlige Vielfache von π zulässt: $k \cdot L = n \cdot \pi$ mit $n=1,2,3,\dots$. Damit lautet unsere Wellenfunktion dann

$$\psi = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \text{ mit den Energieeigenwerten } E = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} .$$

Wir sind aber noch nicht am Ende. Die Wellenfunktion muss noch normiert werden (Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Teilchen im gesamten Kasten muss 1 betragen). Tun wir das, so erhalten wir einen Ausdruck für A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = 1 = A^2 \cdot \int_0^L \sin^2 kx dx = \frac{A^2 L}{2} \text{ oder } A = \sqrt{\frac{2}{L}} .$$

² Wir haben dies nicht bewiesen, man kann die Gültigkeit aber einfach zeigen. Glauben Sie es an dieser Stelle einfach!

Die komplette Lösung unseres Problems lautet damit



Energien: $E = \frac{n^2 h^2 \pi^2}{2mL^2}$ mit $n=1, 2, 3, \dots$

Wellenfunktion: $\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

12.12.1.1 Die Nullpunktsenergie

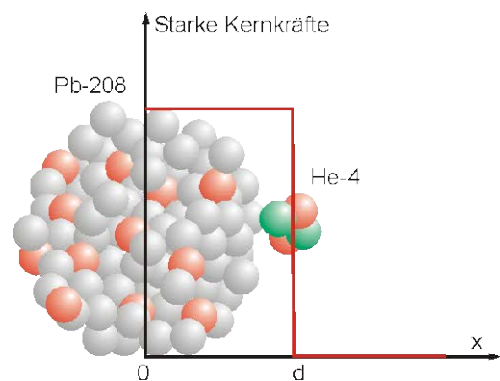
Betrachten wir einmal die Energieeigenwerte etwas genauer. Da, wie bereits bemerkt, $n=0$ keine Lösung sein darf, besitzt ein eingeschlossenes Teilchen immer eine Energie, die grösser ist als null. Der tiefste dazugehörige Energieeigenwert nennt man Nullpunktsenergie.

Jedes Teilchen, das bezüglich seiner Bewegung Beschränkungen unterliegt, besitzt im Minimum diese Nullpunktsenergie, welche immer grösser als null ist!

12.12.2 Der α – Zerfall

Im Normalfall sind die Potentialwände nicht unendlich hoch. Betrachten wir einmal die Situation des α – Strahlers ^{212}Po , mit einer Halbwertszeit von $0.3\mu\text{s}$ und einer Energie des abgestrahlten α – Teilchens von 8.785MeV . Die anziehenden Kernkräfte sollen genau dann ihre Wirkung verlieren, wenn sich das entstandene α – Teilchen ($A=4$) und der Rest des Kerns ($A=208$) noch berühren. Dies ist der Fall bei einem Abstand r von³

$$d = 1.2 \left\{ 4^{1/3} + 208^{1/3} \right\} = 9.1 \text{ fm} .$$



In diesem Abstand besitzt das Coulomb – Potential den Wert

$$U = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot (Z-2) e^2}{r} = \frac{2 \cdot (Z-2) \cdot 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{r [\text{fm}]} = \frac{2 \cdot 82 \cdot 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{9.1 \text{ fm}} = 26.2 \text{ MeV} ,$$

wobei mit $Z-2$ die Kernladung des verbleibenden Kerns gemeint ist. Das Potential erreicht in einem Abstand von $r=26.9 \text{ fm}$ die Energie des alpha – Teilchens von 11.65 MeV . Die Breite der Potentialschwelle beträgt also $b=26.9 \text{ fm} - 9.1 \text{ fm} = 17.8 \text{ fm}$.

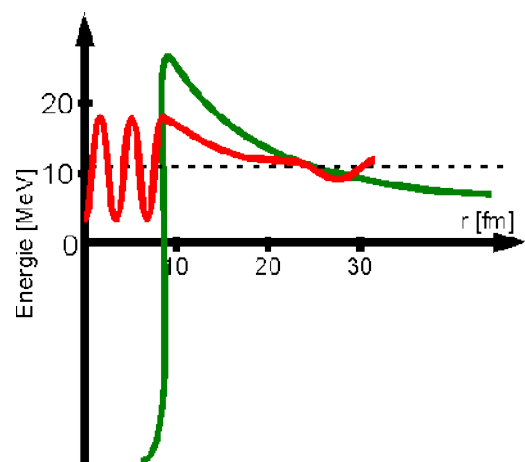
³ Erinnern Sie sich an die Kernphysik? Der Radius eines Atomkerns lässt sich nach $r_K = r_0 \cdot A^{1/3}$ berechnen, wobei $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1.2 \text{ fm}$ ist.

Fazit: das α – Teilchen hat zuwenig Energie, um über die Potentialbarriere zu gelangen. Dass ^{212}Po überhaupt ein α – Strahler ist, hängt damit zusammen, dass die α – Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere hindurch tunneln können. Bei ^{212}Po beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa $2.5 \cdot 10^{-15}$. Ein α – Teilchen mit einer Energie von 8.785 MeV besitzt eine Geschwindigkeit von $v = 2.371 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und trifft damit mit einer Frequenz von $f = \frac{v}{2d} \approx 1.3 \cdot 10^{21} \frac{1}{\text{s}}$ gegen die Potentialbarriere. Daraus lässt sich die Halbwertszeit von

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{2.5 \cdot 10^{-15} \cdot 1.3 \cdot 10^{21} \text{s}^{-1}} = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{s}$$

berechnen, was dem beobachteten Wert von $0.3 \mu\text{s}$ ziemlich nahe kommt. Es bleibt allerdings zu erwähnen, dass die Sache nicht immer so gut herauskommt, wie in diesem Beispiel⁴.

Allerdings ist man nun in der Lage, unterschiedliche Zerfallszeiten zu diskutieren. So hat z.B. ^{238}U eine Halbwertszeit von $T_{\frac{1}{2}} = 4.5 \cdot 10^9 \text{y}$ und das α – Teilchen eine Energie von 4.2 MeV. Bei ^{228}U beträgt die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = 9.1 \text{min}$ und das α – Teil-



chen hat eine Energie von 6.7 MeV. Für beide Isotope beträgt die Höhe der Potentialbarriere knapp 30 MeV. Während die Energie des α - Teilchens der Barriere für ^{228}U nur etwa 60% höher ist, verringert sich die Breite der Potentialbarriere bei ^{228}U um etwa den Faktor 2. Dies hat aber bereits eine Verkürzung der Halbwertszeit um den Faktor $3 \cdot 10^{14}$ zur Folge!

⁴ Sie können unter <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/nuclear/alphdet2.html#c1> selbst verschiedene Isotope durchrechnen.

Aufgaben

- 1) a) Skizzieren und beschreiben Sie den Aufbau einer Vakuumfotozelle und erklären Sie deren Funktionsweise.
b) Warum muss die Fotozelle evakuiert sein?
c) In der Physik wird zwischen innerem und äusserem Fotoeffekt unterschieden. Worin besteht der Unterschied?
- 2) Parallel zu einer Fotozelle wird ein Kondensator geschaltet. Anschliessend wird sie auf unterschiedliche Arten beleuchtet. Skizzieren Sie in einem einzigen $U(t)$ -Diagramm die angegebenen Fälle. Sorgen Sie dafür, dass die einzelnen Graphen in sich konsistent sind – die absoluten Werte sind nebensächlich. Zu Beginn einer Bestrahlung wird der Kondensator immer erst vollständig entladen.
 - a) Die Fotozelle wird mit gelbem Licht hoher Intensität beleuchtet.
 - b) Die Fotozelle wird schwach mit gelbem Licht beleuchtet.
 - c) Die Fotozelle wird mit schwachem UV-Licht bestrahlt.
 - d) Die Fotozelle wird mit UV-Licht hoher Intensität bestrahlt.
- 3) Eine Fotozelle wird in zwei Versuchen mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda_1 = 350 \text{ nm}$ bzw. $\lambda_2 = 250 \text{ nm}$ bestrahlt. Durch Anlegen einer Gegenspannung von $U_1 = 3.55 \text{ V}$ bzw. $U_2 = 4.97 \text{ V}$ wird der Fotostrom vollständig kompensiert. Berechnen Sie aus den Angaben die Planck'sche Konstante.
- 4) Wieder geht es um den Fotoeffekt:
 - a) Wie gross ist die Austrittsarbeit einer Fotokathode, wenn bei Bestrahlung mit Licht der Wellenlänge 220 nm der Fotoeffekt durch eine Gegenspannung von 1.85 V vollständig unterdrückt wird?
 - b) Aus einer Silberfläche, die mit monochromatischem Licht der Wellenlänge 150 nm beleuchtet wird, werden Photoelektronen ausgelöst. Die Wellenlänge, unterhalb der bei Silber der lichtelektrische Effekt einsetzt, ist 260 nm . Wie gross ist die Geschwindigkeit der herausgelösten Elektronen?
- 5) Das gelbe Licht einer Natriumlampe ist bei einer Wellenlänge von 589 nm am hellsten. Welche Energie haben die Photonen bei dieser Wellenlänge?
- 6) Ein Helium-Neon Laser emittiert rotes Licht bei einer Wellenlänge von $\lambda = 633 \text{ nm}$ in einem Lichtstrahl von 3.5 mm Durchmesser und bei einer Energieemissionsrate von 5.5 mW . Der gesamte Strahl werde von einem Detektor absorbiert. Mit welcher Rate absorbiert der Detektor Photonen?
- 7) Unter idealen Bedingungen kann der Mensch bereits eine visuelle Wahrnehmung haben, wenn Licht der Wellenlänge 550 nm von der Netzhaut des Auges mit einer Rate von rund 100 Photonen pro Sekunde aufgenommen wird. Wie gross ist die zugehörige Energieabsorptionsrate der Netzhaut?
- 8) Welchen Energiebetrag können Radiostrahlung ($\lambda = 200 \text{ m}$), Infrarotstrahlung ($\lambda = 10^{-6} \text{ m}$) und Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8} \text{ m}$) an ein Elektron übertragen?
- 9) Natriumatome emittieren oder absorbieren Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 5.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Berechnen Sie die Energie der Photonen
- 10) Eine Diode weist eine Durchlassspannung von $U_0 = 0,65 \text{ V}$ auf. Welche Wellenlänge hat das von der Diode abgestrahlte Licht?
- 11) Eine Leuchtdiode für 950 nm leuchtet trotz der Stromstärke 10 mA nicht. Welche Einsatzspannung ist bei dieser Wellenlänge zu erwarten? Warum ist kein Leuchten festzustellen?

- 12) Die Frequenz der einfallenden Strahlung beträgt bei einem Compton-Prozess $f = 1.2 \cdot 10^{20}$ Hz. Wie groß ist die Frequenz der gestreuten Strahlung wenn die Geschwindigkeit der Elektronen nach dem Stoss $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/s ist?
- 13) Bei einem Streuexperiment mit Gammaquanten an freien Elektronen tritt eine Wellenlängenänderung der Strahlung von $\Delta\lambda = 1.21 \cdot 10^{-12}$ m auf. Unter welchem Winkel φ werden die gestreuten Gammaquanten beobachtet?
- 14) Wie gross war die Wellenlänge eines Tennisballs, der von Greg Rusedski während ATP Champions Cup in Indian Wells am 14. März 1998 mit 239.8 km/h aufgeschlagen worden war? Die Masse eines Tennisballs beträgt 57 g.
- 15) Ein anfänglich ruhendes Elektron durchläuft die Beschleunigungsspannung U . Welche de-Broglie Wellenlänge (in nm) muss dem beschleunigten Elektron zugeordnet werden?
- 16) Welche de-Broglie Wellenlänge weisen mit 500 kV beschleunigte Protonen auf? Warum haben gleich schnelle neutrale H-Atome (fast) die gleiche Wellenlänge?
- 17) In einem Experiment mit einer Elektronenbeugungsröhre werden Elektronen mit einer Spannung von 5 kV beschleunigt. Der Netzebenenabstand des Graphitkristalls im Elektronenstrahl beträgt $a = 2.13 \cdot 10^{-10}$ m. Der Abstand des Kristalls vom Schirm ist $l = 13$ cm. Der Durchmesser eines Beugungsringes wurde zu $d = 2.15 \cdot 10^{-2}$ cm gemessen. Berechnen Sie aus diesen Angaben das Planck'sche Wirkungsquantum h .
- 18) Wie schnell müsste ein Radfahrer ($m = 80$ kg) durch das Baseltor ($\Delta x \approx 3.0$ m) fahren, damit er aufgrund der Impulsunschärfe in erster Ordnung um 10° aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird?
- 19) Wie gross ist die minimale Geschwindigkeitsunschärfe einer Kugel der Masse 500g deren Ort auf 10^{-6} m genau bekannt ist?
- 20) Wie gross ist die minimale Ortsunschärfe einer Kugel von 5g, deren Geschwindigkeit zwischen 350.000001 m/s und 350.00000 m/s liegt?
- 21) Ein 0.10 mm breiter Spalt wird mit dem Licht eines He-Ne-Lasers senkrecht beleuchtet. Er hat die Wellenlänge $\lambda = 633$ nm. Das Licht trifft 3.0 m hinter dem Spalt auf einen Schirm.
- Berechne den Impuls p eines Photons vor dem Spalt.
 - Im Spalt wird der Ort eines Photons auf $\Delta x = 0.10$ mm festgelegt. Schätze mit der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} h$ den Winkel α ab, unter dem das Interferenzminimum erster Ordnung erscheint.
 - Berechne die Breite des Beugungsflecks auf dem Schirm, der durch die beiden Minima erster Ordnung begrenzt wird.
- 22) Der Aufenthaltsort eines Elektrons im Atom ist auf den Bereich der Atomhülle mit dem (ungefähren) Durchmesser $\Delta x = 0.1$ nm beschränkt. Aus der Unschärferelation folgt, dass das Elektron durch die Einschliessung in einem so kleinen Raumbereich zu einer Bewegung gezwungen wird. Genauer gesagt: die durchschnittliche kinetische Energie des Elektrons kann nicht null sein. Es existiert also ein Minimalwert der kinetischen Energie $E_{k,m}$, der als **Nullpunktenergie** des Elektrons bezeichnet wird. Dieser Minimalwert lässt sich in erster Näherung berechnen, wenn man annimmt, dass das Elektron in einem eindimensionalen Bereich der Länge 0.10 nm eingeschlossen ist. Dieser Bereich stellt die Ortsunschärfe dar.
- Berechnen Sie über die Heisenberg'sche Unschärferelation den Minimalimpuls $p_{min} = \Delta p$ des Elektrons (Minimalimpuls = Impulsunschärfe).
 - Berechnen Sie daraus die Nullpunktenergie des Elektrons.
- 23) Im Wasserstoffemissionsspektrum sind Linien bei folgenden Wellenzahlen zu beobachten: 82259, 97492, 102824, 105292, 106632 und 107440 cm^{-1} . Berechnen Sie daraus die Rydberg Konstante! Hinweis: Wellenzahl bezeichnet den Kehrwert der Wellenlänge. Die Wellenzahl wird in cm^{-1} angegeben.

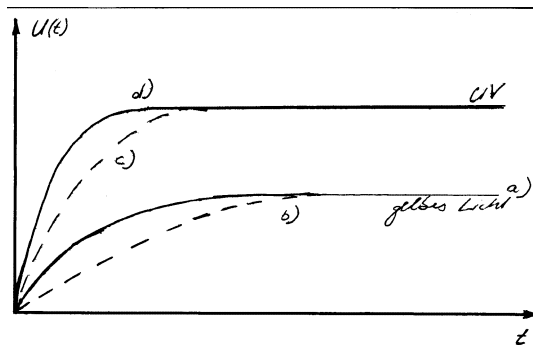
- 24) Ein Teilchen mit der Masse $6.65 \cdot 10^{-27}$ kg befindet sich in einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite L . Zum dritten Energieniveau gehört die Energie $2.00 \cdot 10^{-24}$ J. Wie gross ist L ?
- 25) Die Energie des ausgesandten α – Teilchens bei ^{226}Ra beträgt 4.8 MeV, beim ^{224}Ra hingegen 5.9 MeV. Welches der beiden Isotope hat die grössere Halbwertszeit und warum?

Lösungen

1)

- s. Skript
- Die relativ langsamen Fotoelektronen würden durch die Gasmoleküle gebremst und den Ring somit nicht erreichen. Ausserdem würde O_2 die Cäsiumschicht oxidieren und damit die Fotozelle unbrauchbar machen.
- Beim äusseren Photoeffekt verlassen die Elektronen vollständig das Metall, beim inneren Photoeffekt wechseln sie nur in eine andere Schicht (z.B. in einer Solarzelle oder im Auge). (s. auch Impulse Physik II, S. 196)

2)



- 3) Es ist $\lambda_1 = 350 \text{ nm} \Rightarrow f_1 = 8.571 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ bei U_1 und $\lambda_2 = 250 \text{ nm} \Rightarrow f_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ bei U_2 . Gemäss nebenstehender Abbildung ist

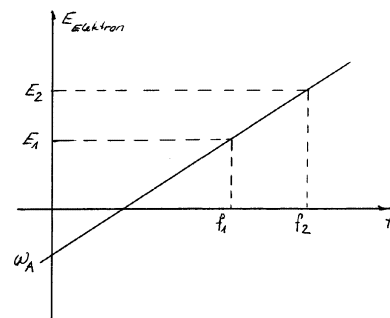
$$E_{El} = E_{Licht} - W_A$$

$$U_2 \cdot e = h \cdot f_2 - W_A$$

$$U_1 \cdot e = h \cdot f_1 - W_A$$

$$(U_2 - U_1) \cdot e = h \cdot (f_2 - f_1)$$

$$h = \frac{(U_2 - U_1) \cdot e}{(f_2 - f_1)} = \underline{\underline{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}}$$



4)

$$a) W_A = h \cdot f - U \cdot e = h \cdot \frac{c}{\lambda} - U \cdot e = 6.07 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{\underline{3.79 \text{ eV}}}$$

$$b) W_{Ag} \approx 7.6455 \cdot 10^{-19} \text{ J} \text{ und } E_{El} = E_{Licht} - W_{Ag} = \frac{1}{2} m v^2, \text{ also } v = \underline{\underline{1.11 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}}$$

$$5) E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{589 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{\underline{3.37 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$$

$$6) \text{ Die Energie eines Photons beträgt } E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{\underline{3.14 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$$

$$\text{Die abgegebene Leistung bedeutet, dass pro Sekunde } N_{\text{Photonen}} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s}}{3.14 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \underline{\underline{1.59 \cdot 10^{16}}}$$

abgegeben werden. Umgerechnet auf die Fläche ergeben sich

$$Q = \frac{N}{A} = \frac{1.59 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}}{\left(\frac{3.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2}\right)^2 \cdot \pi} = 1.65 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}.$$

- 7) Ein Photon hat die Energie $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Pro Sekunde werden vom Auge 100 Photonen aufgenommen, was einer Energie von $P = 3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot 100 \frac{1}{\text{s}} = 3.6 \cdot 10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{s}}$.

- 8) Die Lösungen sind: $9.93 \cdot 10^{-28} \text{ J}$, $1.99 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ und $1.99 \cdot 10^{-16} \text{ J}$

9) $E = h \cdot f = 2.1 \text{ eV}$

- 10) Bei einer Einsatzspannung von 0.65 V strahlt die Diode mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1.91 \mu\text{m}$.

- 11) Die Diode für 950 nm hat eine Einsatzspannung von 1.31 V. Sie sendet Infrarotstrahlung aus, die für das Auge nicht sichtbar ist.

- 12) Die abgegebene Energie ist gleich der kinetischen Energie der Elektronen, die jedoch relativistisch zu berechnen ist. $\Delta E = E_{kin} = E_{ges} - E_0$. Das ist gleich

$$\Delta E = \frac{m_{0e} c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_{0e} c^2 = 0.15 m_{0e} c^2 = 7.9 \cdot 10^4 \text{ eV}.$$

Die Frequenz beträgt daher

$$f_1 = \frac{hf_0 - \Delta E}{h} = 1.01 \cdot 10^{20} \text{ Hz}.$$

- 13) Aus $\Delta \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$ folgt durch eine Umformung $\cos \varphi = 1 - \frac{\Delta \lambda m_e c}{h} = 0.5005$ und daraus $\varphi = 60^\circ$.

- 14) Die Geschwindigkeit des Balls war 66.61 m/s. Damit folgt für die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{0.057 \text{ kg} \cdot 66.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1.75 \cdot 10^{-34} \text{ m}$. Die Wellenlänge makroskopischer Objekte ist also bei weitem zu klein, als dass sich daran Welleneigenschaften beobachten liessen.

- 15) Nach dem Energieerhaltungssatz gilt $E_{kin} = qU = eU = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2$. Aufgelöst nach v erhält man

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_0}}.$$

Mit $p = m \cdot v = \sqrt{2eUm_0} = \sqrt{2E_{kin} m_0}$ folgt für die deBroglie Wellenlängen-

ge $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2E_{kin}m_0}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_{kin}m_0 \cdot c^2}}$. Setzen wir für $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$ und für $m_0c^2 = 0.511$

MeV ein, so erhalten wir $\lambda = \frac{1.226 \text{ nm}}{\sqrt{E_{kin}}}$, wobei E_{kin} in eV einzusetzen ist.

16) Einsetzen der Werte, in die unter Aufgabe 2 hergeleitete Formel

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2E_{kin}m_0}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_{kin}m_0 \cdot c^2}}, \text{ ergibt mit } m_0c^2 = 938\text{MeV } \lambda = \frac{0.0286 \text{ nm}}{\sqrt{500000}} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-5} \text{ nm}}}.$$

17) Die Wellenlänge berechnen wir mit $\lambda = \frac{r \cdot a}{l} = \frac{\frac{d}{2} \cdot a}{l} = 0.176 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Daraus können wir unter

Verwendung der deBroglie Beziehung das Plancksche Wirkungsquantum berechnen:

$$h = \lambda \cdot \sqrt{2emU} = 0.0176 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \sqrt{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5000 \text{ V} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = \underline{\underline{6.743 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}}.$$

18) Es gilt $\sin \alpha = \frac{\Delta p}{p} = \frac{h}{2\Delta x m v}$, mit $\Delta p = \frac{h}{2\Delta x}$ und $p = mv$. Aufgelöst bekommt man

$$v = \frac{h}{2\Delta x m \sin \alpha} = 1.27 \cdot 10^{-36} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

19) Aus der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}$ bekommt man $\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{h}{2m\Delta x}$. Daraus folgt für die

$$\text{Unschärfe der Geschwindigkeit } \Delta v \geq 1 \cdot 10^{-28} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

20) Aus der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}$ bekommt man $\Delta x \geq \frac{h}{2m\Delta v}$. Daraus folgt für die Un-

$$\text{schärfe des Ortes } \Delta x \geq \frac{1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \cdot 10^{-27} \text{ m}.$$

21) Folgt...

22) Folgt...

23) Folgt...

24) Die Energien berechnen sich nach $E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$. Daraus erhält man $L = \sqrt{\frac{n^2 h^2}{8mE}} = 6.1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

25) Ausgehend von der Annahme, dass für beide Isotope der Potentialverlauf für ein α - Teilchen die gleiche Höhe hat, wird dasjenige α - Teilchen mit der grösseren Energie die geringere Barrierebreite vor sich haben. Dadurch steigt die Tunnelwahrscheinlichkeit rapide an. ^{224}Ra müsste also eine kleinere Halbwertszeit haben als ^{226}Ra . Dies ist auch der Fall:

$$T_{\frac{1}{2}}^{224\text{Ra}} = 3.66 \text{ d} \text{ gegenüber } T_{\frac{1}{2}}^{226\text{Ra}} = 1600 \text{ y}.$$