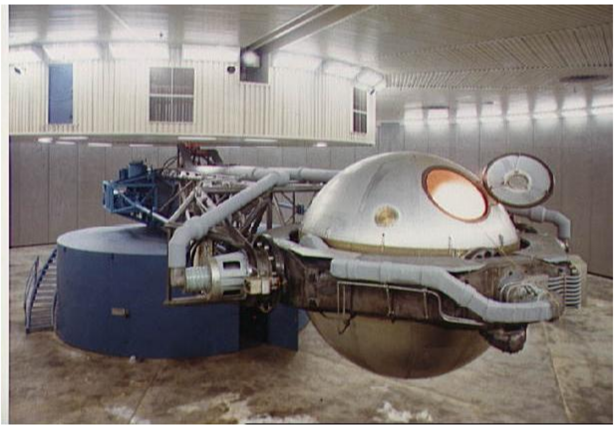
6 Kreisbewegung

Ein einäugiges Monster? Eine Kaffeemühle? Nein, eine Zentrifuge für Astronauten. Warum die NASA ihre Astronauten durchschleudert und was die Astronauten dabei durchmachen – dies erfahren Sie in diesem Kapitel



Quelle: images.jsc.nasa.gov

Inhaltsverzeichnis

6.1 Kreisbewegungen

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit Bewegungen von Körpern, welche einer Kreisbahn folgen. Diese Situation tritt sehr häufig auf: Überall, wo rotierende Objekte auftreten (Räder, Schwungmassen, Gyroskope, etc…) bewegen sich Massepunkte auf Kreisbahnen. Immer dann, wenn Fahr- oder Flugzeuge eine Kurve beschreiben, bewegen sie sich teilweise auf einer Kreisbahn. Die nachfolgenden Abschnitte sollen die Grundlagen zur Beschreibung solcher Bewegungen liefern.

6.2 Die Wahl des optimalen Koordinatensystems

Anders als bisher handelt es sich bei einer Kreisbewegung um zweidimensionale Bewegungen, was sie Sache ein wenig kompliziert macht. So zeigt Abbildung 1a ein Auto, das sich auf einer kreisförmigen Bahn bewegt. Darübergelegt sieht man ein Koordinatengitter. Die Position P(x/y) des Fahrzeugs kann jederzeit einfach angegeben werden, man muss nur die Koordinaten x und y kennen. Aber genau hier liegt die Schwierigkeit: Sowohl die Ortskoordinate x wie auch y sind zeitabhängig! Um uns das Leben zu vereinfachen, überlegen wir mal, ob es hier nicht ein besseres System zur Beschreibung der Position gäbe. Eigentlich ist es doch so, dass das Fahrzeug einen Abstand r vom Ursprung des x-y Koordinatensystems hat, wie in Abbildung 1b) gezeigt ist. Zusätzlich schliesst r mit der x-Achse einen Winkel φ ein. Somit ist die Position P(r/φ) des Fahrzeugs durch die Angabe des Abstandes r vom Ursprung und den Winkel φ ebenfalls eindeutig bestimmt. Man spricht auch von Polar- oder Kreiskoordinaten.

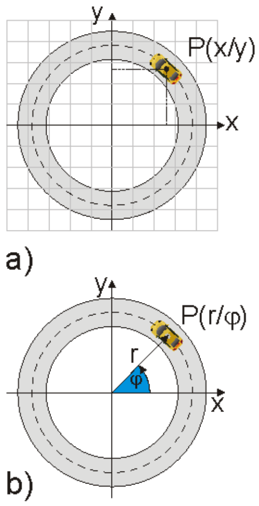


Abbildung 1 Die Wahl des optimalen Koordinatensystems ist entscheidend für eine einfache Bearbeitung.

Für uns vereinfacht sich die Sache nun: Da der Mittelpunkt der Kreisbewegung im Koordinatenursprung liegt, verändert sich der Abstand r nicht und entspricht auch gleich noch dem Radius der Kreisbahn. Die einzige zeitabhängige Grösse ist der Winkel φ.

6.2.1 Das Bogenmass

Speziell an diesem Winkel φ ist eigentlich nur, dass er im Bogenmass angegeben werden muss! Aber auch das ist nur halb so kompliziert, wie es sich anhört. Die Winkelangabe im Bogenmass ist *definiert* als das Verhältnis von Bogenlänge zu Radius (vgl Abbildung 2)

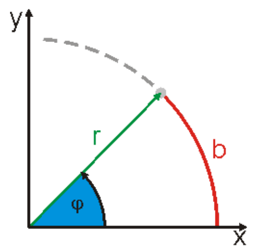


Abbildung 2 Zur Definition des Bogenmasses.

$$\varphi = \frac{b}{r}. \qquad (6.1)$$

Der Vollwinkel entspricht damit

$$\frac{Umfang}{Radius} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi. \qquad (6.2)$$

6.2.2 Die Winkelgeschwindigkeit

Wir befassen uns mit Bewegungen, bei denen ein Objekt mit einer Geschwindigkeit v auf der Kreisbahn unterwegs ist, wie in Abbildung 3 dargestellt. Mit der Zeit ändert sich der Winkel φ natürlich, was der Mathematiker so schreibt:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{6.3}$$

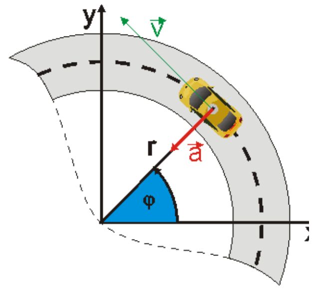


Abbildung 3 Zur Beschreibung der gleichförmigen Kreisbewegung.

Der Physiker identifiziert die Grösse ω eindeutig als eine Geschwindigkeit und nennt sie entsprechend Winkelgeschwindigkeit mit der Einheit

$$[\omega] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{1}{s} \tag{6.4}$$

Auch die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v und der Winkelgeschwindigkeit ω ist schnell gefunden:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta b}{\Delta t \cdot r} \Leftrightarrow r \cdot \omega = \frac{\Delta b}{\Delta t} = v. \tag{6.5}$$

Zusätzlich taucht in diesem Zusammenhang die Zeitspanne Δt auf, welche ein Objekt für eine volle Umdrehung braucht. Man nennt sie die Umlaufzeit[1] T und für sie gilt

$$v = \frac{\text{Umfang}}{\text{benötigte Zeit}} = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v}. \tag{6.6}$$

6.3 Die gleichförmige Kreisbewegung

Genau wie bei der Kinematik wollen wir uns zunächst mit Kreisbewegungen befassen, bei denen das Objekt mit konstanter Geschwindigkeit v auf der Kreisbahn unterwegs ist. Dementsprechend wird auch die Winkelgeschwindigkeit ω konstant sein. Man spricht dann von gleichförmiger Kreisbewegung.
Interessant ist aber die Tatsache, dass das Objekt ständig seine Richtung ändert – es muss deshalb eine Kraft auf das kreisende Objekt einwirken. Da die Geschwindigkeit v jedoch konstant ist, muss die Kraft zwingend senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor stehen – sie zeigt somit zum Kreismittelpunkt hin. Wir wollen nun ermitteln, wie gross die aufgrund der Kraft erzeugte Beschleunigung ist.

[1] In späteren Zusammenhängen auch Periodendauer oder einfach Periode genannt.

6.3.1 Die Zentripetalbeschleunigung

Ohne die wirkende Kraft würde sich das Auto in Abbildung 4 in der Zeit Δt von Punkt P_1 nach Punkt P_2 bewegen. Tatsächlich befindet es sich nach der Zeit Δt aber im Punkt P_2', der auf der Kreisbahn liegt. Die wirkende Kraft hat also dafür gesorgt, dass der Wagen nicht um die Strecke Δs nach aussen gerutscht ist. Wir berechnen das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten $v \cdot \Delta t$, r und $r+s$.

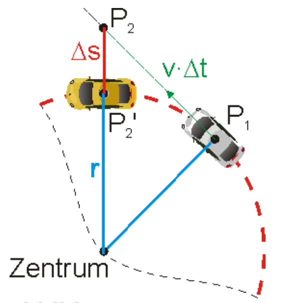


Abbildung 4 Zur Herleitung der Zentripetalbeschleunigung.

$$(r+\Delta s)^2 = (v \cdot \Delta t)^2 + r^2 \qquad (6.7)$$

aufgelöst ergibt sich

$$r^2 + 2\Delta s r + \Delta s^2 = v^2 (\Delta t)^2 + r^2$$

oder

$$\Delta s(2r+\Delta s) = v^2 (\Delta t)^2 . \qquad (6.8)$$

Wenn man nur sehr kleine Zeiten Δt betrachtet, so ist die Strecke Δs sehr viel kleiner als der Radius r. Damit wird die linke Klammer in (6.8) vereinfacht zu $(2r+\Delta s) \approx 2r$ und man erhält

$$2r\Delta s \approx v^2 (\Delta t)^2 \qquad (6.9)$$

respektive

$$\Delta s \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)(\Delta t)^2 . \qquad (6.10)$$

Zusätzlich wissen wir, dass im Problem eine konstante Beschleunigung vorliegt, so dass für die Strecke

$$\Delta s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \qquad (6.11)$$

gilt. Vergleicht man (6.10) mit (6.11), so stellt man fest, dass für die Beschleunigung des Autos zum Kreismittelpunkt hin

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (6.12)$$

geschrieben werden kann. Jedes Objekt, welches sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt, erfährt also eine Beschleunigung, welche quadratisch mit der Geschwindigkeit steigt, proportional zum Radius sinkt und stets zum Kreismittelpunkt hin gerichtet ist. Man nennt diese Beschleunigung Zentripetalbeschleunigung.

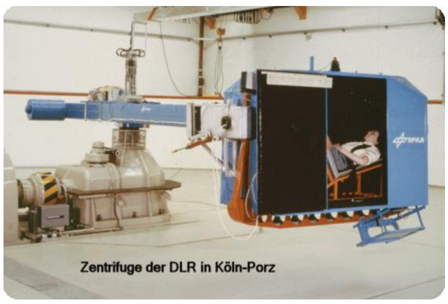


Abbildung 5 Zentrifuge zum Schleudern von Astronauten. Quelle: www.lrt.mw.turm.de

Die NASA oder das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt testen ihre zukünftigen Astronauten in riesigen Zentrifugen, wie in Abbildung 5 gezeigt. Dadurch simuliert man die beim Start der Rakete auftretenden Kräfte. Der Astronaut erfährt dabei eine Zentripetalbeschleunigung, welche ein Mehrfaches der Erdbeschleunigung beträgt. Bei solchen Beschleunigungen (meistens in vielfachen von g angegeben), rutschen z.B. die Organe und das Blut nach unten (oder nach oben). Dies kann so weit gehen, dass das Gehirn nicht mehr genügend durchblutet wird und der Astronaut in die Bewusstlosigkeit fällt (bei etwa 10g).

Beispiel: Welche Beschleunigung erfährt ein Astronaut in einer Zentrifuge, wenn er 5 m vom Drehzentrum entfernt platziert wird und mit 21 Umdrehungen pro Minute geschleudert wird?

Lösung: Die Periodendauer beträgt $T = \frac{60}{21} s$. Es folgt für die Zentripetalbeschleunigung

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 \cdot r = \underline{\underline{24.2 \frac{m}{s^2}}} \approx \underline{\underline{2.5 g}} .$$

Mit T bezeichnet man die Umlaufzeit. Aufgrund der auftretenden Zentripetalbeschleunigungen haben Piloten von Kampfjets spezielle Anzüge, welche sie vor den auftretenden g – Kräften und damit vor einem g-LOC (*g*-induced Loss Of Consciousness / Bewusstlosigkeit) schützen sollen.

6.4 Die Zentripetalkraft

Die Formel für die Zentripetalbeschleunigung wurde mit (6.12) hergeleitet. In Kombination mit dem 2. Newton'schen Axiom erhalten wir für die zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Zentripetalkraft F_Z die Beziehung

$$F_Z = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r . \qquad (6.13)$$

6.4.1 Ursachen der Zentripetalkraft

Interessant ist die Tatsache, dass mit (6.13) eine Beziehung zur Beschreibung der bei der gleichförmigen Kreisbewegung zum Kreismittelpunkt hin zeigenden Kraft gefunden wurde, ohne dass wir uns dabei Gedanken gemacht haben, was denn eigentlich die Ursache dieser Kraft ist, welche Kraft also für die Kreisbahn sorgt. Das wollen wir nun nachholen.

Dazu kommen wir noch einmal zurück auf unser Auto, das eine Kreisbahn beschreibt. Zusätzlich tragen wir noch alle wirkenden Kräfte ein, wie das in Abbildung 6 gezeigt ist. Es wirken fünf Kräfte auf das Fahrzeug ein: Die Motorenkraft $\vec{F}_{Motor}$ (Antrieb) und die Fahrwiderstandskraft $\vec{F}_{Fahrwiderstand}$ (Reibungskräfte in Fahrtrichtung, Luftwiderstand, etc.), welche sich aufheben,

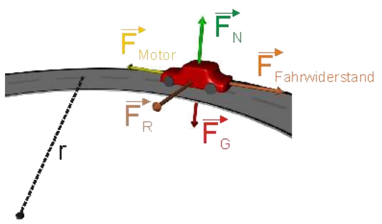


Abbildung 6 Auf Fahrzeug wirkende Kräfte während einer Kurvenfahrt.

die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und die Normalkraft $\vec{F}_N$, welche sich ebenfalls aufheben und eine Haftreibungskraft $\vec{F}_R$, welche dafür sorgt, dass das Auto während der Kurvenfahrt haftet und zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin zeigt. Die Summe aller angreifenden Kräfte gibt

$$\vec{F}_{\text{Res}} = \vec{F}_{\text{Motor}} + \vec{F}_{\text{Fahrwiderstand}} + \vec{F}_{\text{G}} + \vec{F}_{\text{N}} + \vec{F}_{\text{R}} = \vec{F}_{\text{R}} \qquad (6.14)$$

Somit ist klar, dass die Haftreibungskraft $\vec{F}_R$ dafür verantwortlich ist, dass das Auto die Kurve überhaupt gefahren werden kann (man stelle sich einfach vor, dass die Kurve auf Glatteis beschrieben werden soll…). Die Haftreibungskraft $\vec{F}_R$ ist somit gleich der Zentripetalkraft und (6.14) kann auch

$$\vec{F}_{\text{Res}} = \vec{F}_{\text{R}} = \vec{F}_Z \qquad (6.15)$$

geschrieben werden. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist $\vec{F}_Z$ somit einfach eine andere Bezeichnung für die resultierende Kraft.

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung entspricht die Zentripetalkraft gerade der resultierenden Kraft!

6.4.2 *Experimentelle Überprüfung der bisherigen Theorie*

Die Beziehungen (6.12) respektive (6.13) sind aufgrund von Überlegungen entstanden und bisher nicht experimentell überprüft. Das soll nun nachgeholt werden.

Versuchsaufbau	*Kräftebilanz*

Resultate

Messung	#1	#2
m [kg]		
10·T [s]		
T[s]		
r [m]		
F_F [N]		
$F_{Z,\text{ berechnet}}$ [N]		
Δ [%]		

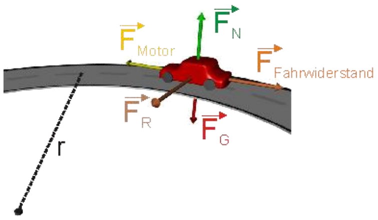
Analyse und Diskussion

6.4.3 Einfache Anwendungen

Nachdem die Zusammenhänge nun auch experimentell bestätigt wurden, konzentrieren wir uns nun auf einfache Problemstellungen. Einfach bezieht sich dabei auf die Tatsache, dass alle am Körper angreifenden Kräfte (anti-)parallel oder senkrecht zueinander stehen sollen.
Dazu kommen wir noch einmal auf ein Fahrzeug in einer Kurve zurück.

Beispiel: Ein Auto fahre in eine Kurve, deren Radius 30 m beträgt. Durch Reibung trete eine Zentripetalbeschleunigung von maximal 5 m/s^2 auf. Mit welcher maximalen Geschwindigkeit wird das Auto die Kurve durchfahren können?

Lösung: Wir fertigen eine Skizze an und tragen alle Kräfte ein. Anschliessend wird die resultierende Kraft ermittelt.



$$\vec{F}_{\text{Res}} = \vec{F}_{\text{Motor}} + \vec{F}_{\text{Fahrwiderstand}} + \vec{F}_{\text{G}} + \vec{F}_{\text{N}} + \vec{F}_{\text{R}} = \vec{F}_{\text{R}}$$

Oder in Betragsschreibweise

$$F_{Res} = \underline{\underline{F_R = F_Z}}\,.$$

$$m \cdot a_{\max} = m \frac{v_{\max}^2}{r}$$

$$v_{\max} = \sqrt{r \cdot a_{\max}}$$

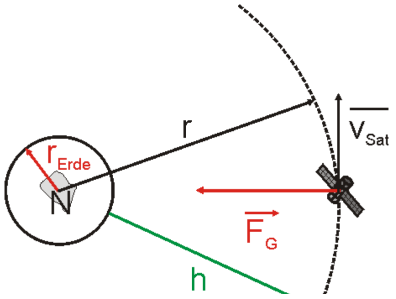
$$= \sqrt{30m \cdot 5m/s^2} = 12.2\, m/s = \underline{\underline{44 \frac{km}{h}}}$$

Interessand ist dabei die Tatsache, dass die Masse keine (scheinbar) Rolle spielt!

Satelliten umrunden die Erde auf nahezu kreisförmigen Bahnen. Ein Beispiel nun dazu.

Beispiel: Ein Satellit bewege sich 200 km über der Erdoberfläche mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn um den Erdmittelpunkt. Welche Geschwindigkeit besitzt er, wenn wir annehmen, dass die Erdanziehungskraft in dieser Höhe um 6 % geringer ist als direkt auf der Erdoberfläche? Wie lange benötigt er für einen Umlauf?

Lösung: Gegeben sind die Beschleunigung durch $g_1 = a = 0.94 \cdot 9.81\frac{m}{s^2} = 9.22\frac{m}{s^2}$ und der Radius der Kreisbahn $r = r_{Erde} + h = 6370km + 200km = 6570km = 6.57 \cdot 10^6 m$. Eine Skizze und die Kräftebilanz geben folgendes:



$$\vec{F}_{Res} = \vec{F}_G = \vec{F}_Z$$

Oder in Betragsschreibweise

$$F_{Res} = \underline{F_G = F_Z}$$

$$mg_1 = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{r \cdot g_1} = \underline{\underline{7780\frac{m}{s}}}.$$

6.4.3.1 Die Fallbeschleunigung am Äquator

Im Themenbereich der Kinematik haben sie gelernt, dass die Fallbeschleunigung ortsabhängig ist. Ursachen sind die Tatsachen, dass die Erde keine Kugel ist und ihre Masse auch nicht homogen verteilt ist. Ein weiterer Grund ist aber auch die Rotation der Erde um ihre Achse. Wie hängt denn die Fallbeschleunigung Äquator von der Rotation der Erde ab? Die Skizze in Abbildung 7 liefert den Ansatz für die Kräftebilanz. Am Äquator wirkt auf einen Körper die Gewichtskraft (erzeugt von der Erde) und die Normalkraft. Letztere ist aufgrund der Rotation aber etwas kleiner als die Gewichtskraft. Die Differenz entspricht der Zentripetalkraft.

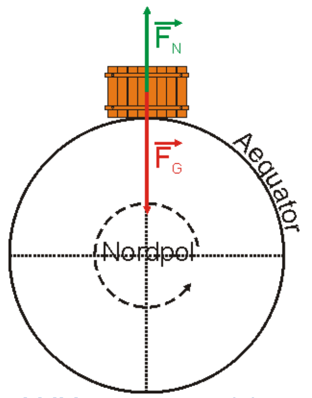


Abbildung 7 Zur Herleitung der Fallbeschleunigung am Aequator.

$$\vec{F}_{Res} = \vec{F}_G + \vec{F}_N$$

Oder in Betragsschreibweise

$$F_{Res} = F_G - F_N = F_Z \qquad (6.17)$$

Das lösen wir nun nach der Fallbeschleunigung $g_{Aequator}$ auf:

$$F_G - F_N = F_Z$$

$$mg_0 - mg_{Aequator} = m\frac{v^2}{r_{Erde}} \tag{6.18}$$

$$g_{Aequator} = g_0 - \frac{v^2}{r_{Erde}} = g_0 - \frac{\left(\frac{2\pi r_{Erde}}{T}\right)^2}{r_{Erde}} = g_0 - \frac{4\pi^2 r_{Erde}}{T^2}$$

Als Umlaufzeit setzen wir $T = 23h56\min = 86160s$, für den Erdradius $r_{Erde} = 6.3782 \cdot 10^6 m$ und für die Fallbeschleunigung $g_0 = 9.80665\frac{m}{s^2}$ und erhalten $g_{Aequator} = 9.8067\frac{m}{s^2} - 0.0339\frac{m}{s^2} = 9.7728\frac{m}{s^2}$. Der richtige Wert beträgt $g_{Aequator} = 9.7803\frac{m}{s^2}$. Verblüffend, nicht wahr? Durch die Erdrotation ist die Fallbeschleunigung am Äquator also niedriger als an den beiden Polen. Deshalb stehen Raketenabschussrampen in Äquatornähe, weil man so auch weniger Sprit braucht.

6.4.4 Schwierigere Anwendungen

Mit welchem Winkel muss sich ein Fahrradfahrer in die Kurve legen, wenn er mit einer gewissen Geschwindigkeit eine Kurve von gegebenem Radius fahren will? Welche Zentripetalkraft tritt auch, wenn ein Flugzeug einen Bogen mit einer gegebenen konstanten Geschwindigkeit fliegt?

Auch wenn diese Probleme von scheinbar völlig unterschiedlicher Natur sind, so ist auch hier das Vorgehen wieder gleich wie bei den vorherigen Aufgaben. Man bestimmt die Resultierende Kraft. Diese muss – sofern es sich um eine gleichförmige Kreisbewegung handelt – zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin zeigen. Man muss lediglich die Kräfte geschickt zerlegen.

6.4.4.1 Flugzeug auf Kurvenflug

Fliegt ein Flugzeug in konstanter Höhe, so halten sich die Gewichtskraft und die Auftriebskraft die Waage, wie in Abbildung 8 a) gezeigt ist. Legt sich das Flugzeug in eine Kurve (die Höhe soll immer dabei gleich bleiben), so sind immer noch dieselben zwei Kräfte wirksam – nur sind sie eben nicht mehr antiparallel und die resultierende Kraft ist darum grösser als null. Die Situation der Kräfte am Flugzeug sieht dann aus, wie in Abbildung 8 b) gezeigt ist. Zur Addition zerlegen wir die Auftriebskraft in zwei Komponenten: Eine antiparallel zur Gewichtskraft und eine senkrecht dazu, wie in Abbildung 8 c) dargestellt.

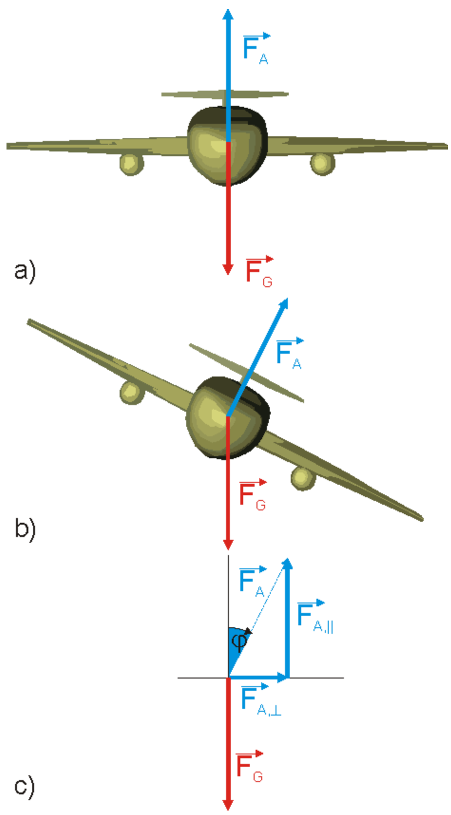


Abbildung 8 Flugzeug auf Kurvenflug

Für die resultierende Kraft ergibt sich

$$\vec{F}_{Res} = \vec{F}_G + \vec{F}_A = \vec{F}_G + \vec{F}_{A,\parallel} + \vec{F}_{A,\perp}\,. \tag{6.19}$$

Man erkennt in Abbildung 8, dass sich $\overrightarrow{F_{A,\parallel}}$ und $\overrightarrow{F_G}$ aufheben müssen, wenn das Flugzeug während des Kurvenflugs seine Höhe nicht ändert. Es bleibt als resultierende Kraft – und somit Zentripetalkraft – nur noch $\overrightarrow{F_{A,\perp}}$ übrig. Es gilt also (Beträge)

$$F_{Res} = F_{A,\perp} = F_Z\,. \tag{6.20}$$

Man erkennt ebenfalls in Abbildung 8, dass für den Winkel zwischen $\overrightarrow{F_A}$ und der Vertikalen, nennen wir ihn einmal φ, die Beziehung $\tan\varphi = \frac{F_{A,\perp}}{F_{A,\parallel}}$ gilt. Somit ist ein Ausdruck für $F_{A,\perp}$ gefunden und kann in (6.20) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} F_{A,\perp} &= F_Z \\ F_{A,\parallel}\cdot\tan\varphi &= m\frac{v^2}{r} \\ F_G\cdot\tan\varphi &= m\frac{v^2}{2} \\ mg\cdot\tan\varphi &= m\frac{v^2}{r} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Dabei hat man noch $F_G = F_{A,\parallel}$ berücksichtigt. Die letzte Gleichung in (6.21) kann nun nach der jeweiligen gesuchten Grösse aufgelöst werden.

Dieses Beispiel mit dem Flugzeug steht stellvertretend für alle Probleme mit Winkeln im Zusammenhang mit der gleichförmigen Kreisbewegung. Die Skizzen bleiben jeweils gleich, nur das Objekt und die Kräftebezeichnungen ändern sich, wie das in Abbildung 9 gezeigt ist.

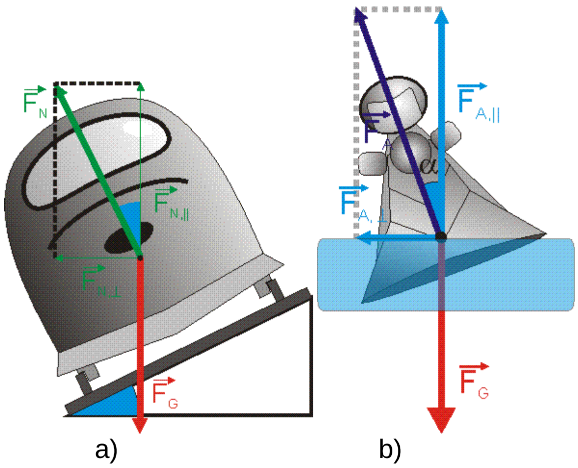


Abbildung 9 Kräfteverhältnisse für einen Zug (a), respektive einen Jetski in der Kurve (b).