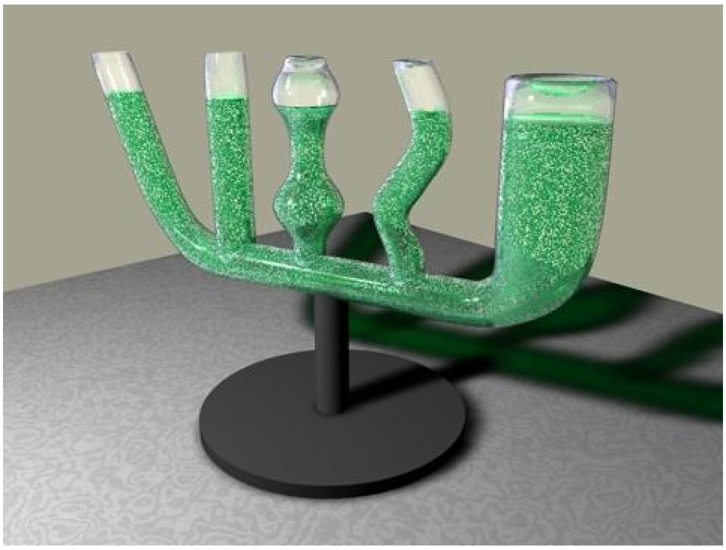
8 Statik der Fluide

Wieso diese Röhren korrespondieren, warum man daraus ein Paradoxon erkennen kann und was das mit dem schwimmen eines Flosses zu tun hat, erfahren Sie in diesem Kapitel.



Inhaltsverzeichnis

8.1 Definition

In diesem Kapitel werden wir über Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen sprechen. Da sich das Verhalten von Gasen in vielen Bereichen nicht vom Verhalten von Flüssigkeiten unterscheidet, werden Flüssigkeiten und Gase unter dem Oberbegriff “Fluide“ zusammengefasst.

8.2 Aggregatzustände

In der klassischen Thermodynamik wird zwischen drei verschiedenen Aggregatzuständen von Stoffen unterschieden, wie in Abbildung 1 bezeichnet.
In Feststoffen wirken zwischen den Teilchen grosse Kohäsionskräfte[1], welche die kleinsten Teilchen des Stoffes fest auf ihrer gegebenen Position halten. Dadurch erscheint der Stoff in einer festen Gestalt und kann nur durch grosse Kräfte verformt werden. Flüssigkeiten dagegen haben keine feste Gestalt. Sie können eine beliebige Form annehmen, wobei das Volumen des Stoffes aber gleich bleibt. Zwischen den Teilchen wirken geringe Kohäsionskräfte, die Teilchen sind deswegen nicht an bestimmte Plätze gebunden und können leicht verschoben werden. Bei Gasen sind (fast) keine Kohäsionskräfte vorhanden. Die kleinsten Teilchen eines Gases nehmen dadurch den ganzen ihnen zur Verfügung stehenden Raum ein.
Jeder Stoff kann als Feststoff, als Flüssigkeit oder als Gas auftreten. Man bezeichnet diese drei Aggregatzustände auch als Phasen eines Stoffes. Der Übergang eines Feststoffs zu einer Flüssigkeit oder einer Flüssigkeit zu einem Gas geschieht bei für den Stoff charakteristischen Temperaturen und Drücken. Die Wechsel von einer Phase zur anderen haben spezielle Bezeichnungen bekommen. Auch diese sind in Abbildung 1 dargestellt.

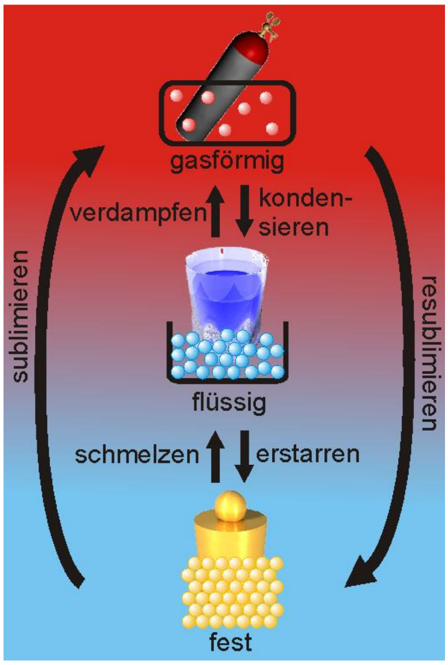


Abbildung 1 Bezeichnung der Aggregatzustände und die Benennung der Aggregatzustandsänderungen.

8.3 Die Dichte

Im Zusammenhang mit Stoffen trifft man immer wieder auf den Begriff der Dichte, für welche meistens der griechische Buchstabe “rho“ verwendet wird. Es handelt sich bei der Dichte um das Verhältnis von Masse m zu Volumen V eines Körpers[2]:

$$\rho = \frac{m}{V}. \qquad 8.1$$

Die dazugehörige SI – Einheit[3] ist

[1] Anziehende Kräfte zwischen den Teilchen
[2] Exakterweise müsste man deshalb den Begriff “Massendichte“ verwenden.
[3] Bitte beachten: Gerade in der Chemie wird in diesem Zusammenhang häufig im cgs – Einheitensystem gerechnet ($\frac{g}{cm^3}$), welches aber mit dem SI – Einheitensystem nicht kompatibel ist!

$$[\rho]=\frac{[m]}{[V]}=\frac{kg}{m^3} \qquad 8.2$$

Die Dichte von verschiedenen Stoffen ist normalerweise unterschiedlich und deshalb ein wichtiger Ausdruck für die Reinheit und die Packung der kleinsten Teilchen eines Materials. Deshalb ist die Dichte auch eine druck- und temperaturabhängige Grösse. In der Natur kommen ganz unterschiedliche Dichten vor. Tabelle 1 und Tabelle 2 geben dazu eine Übersicht. Beim Element Osmium handelt es sich übrigens um das dichteste bekannte Material bei STP!
Da in Feststoffen die kleinsten Teilchen ohnehin schon extrem nahe beieinander sitzen, sind die Druck- und Temperaturabhängigkeit bei Feststoffen nicht sehr stark ausgeprägt. Diese Abhängigkeit nimmt allerdings über die Flüssigkeiten zu den Gasen hin stark zu. So wird als Beispiel die Dichte eines idealen Gases durch eine Verdoppelung des Drucks ebenfalls verdoppelt. Grundsätzlich ist mit zunehmender Temperatur eine Abnahme der Dichte eines Materials verbunden, weil die Eigenbewegung der kleinsten Teilchen zunimmt.
Als Beispiel für den Dichteverlauf einer Flüssigkeit als Funktion der Temperatur soll hier Wasser herhalten, das allerdings eine Anomalie aufweist, wie Abbildung 2 zeigt. Bei Wasser nimmt die Dichte nicht vom Schmelzpunkt her mit zunehmender Temperatur ab sondern erst ab rund 4°C. Die Anomalie, welche zwischen dem Schmelzpunkt von 0°C und 4°C die Dichte zunächst ansteigen lässt, beruht auf der Ausbildung von Wasserstoffbrücken zwischen den Wassermolekülen. Genaueres dazu erfahren Sie in der Chemie.

Tabelle 1 Dichten einiger Metalle

Material	Dichte $\frac{kg}{m^3}$
	2700
Titan	4540
	7870
Nickel	8900
	11340
Gold	19320
	22570

Angaben bei STP, Quelle: Wikipedia

Tabelle 2 Verschiedene Dichten

Material	Dichte $\frac{kg}{m^3}$
	$10^{-25} – 10^{-15}$
Erdatmosphäre	1.2
	~13000
Sonnenkern	~150000
	10^9
Atomkern	$2\cdot10^{17}$
	$4\cdot10^{17}$

Quelle: Wikipedia

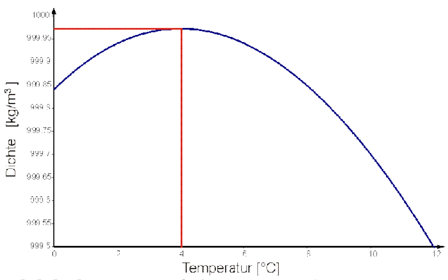


Abbildung 2 Dichteverlauf von Wasser.

8.3.1 *Schwimmen, Versinken und Schweben*

Körper können in Fluiden schwimmen, schweben oder versinken, je nachdem ob die Dichte des Körpers kleiner, gleich oder grösser ist als die Dichte des Fluides:

Versinken	Schweben	
$\rho_{Körper} > \rho_{Fluid}$	$\rho_{Körper} = \rho_{Fluid}$	$\rho_{Körper} < \rho_{Fluid}$

Ein Schiff schwimmt nur deswegen auf dem Wasser, weil seine mittlere Dichte (viele Lufteinschlüsse) kleiner ist als die von Wasser!
Obige Regeln gelten aber auch für Flüssigkeiten selbst: Weniger dichte Flüssigkeiten schwimmen auf Dichteren, wenn sie sich nicht mischen.

8.4 Der Druck

Oftmals wird der Begriff Druck im Alltag verwendet ohne jedoch seine Bedeutung oder seine Herkunft zu exakt zu kennen. Um ein wenig Licht ins Dunkel zu bringen, stellen wir uns einen mit Luft prall gefüllten Ballon vor, wie er in Abbildung 3 dargestellt ist. Was sorgt eigentlich dafür, dass sich die Gummihaut nicht wieder zusammenzieht? Es sind die Gasteilchen, welche unter Aufwand von Arbeit in die Ballonhülle eingefüllt werden mussten. Diese kleinsten Teilchen bewegen sich und stossen immer wieder mit der Ballonwand zusammen und üben eine Kraft aus diese Wand aus. Da es insgesamt sehr viele Gasteilchen in einem gefüllten Ballon drin hat, summieren sich diese kleinen "Stosskräfte" zu einer sehr grossen Kraft, welche schliesslich die Gummihaut auseinanderdehnt.

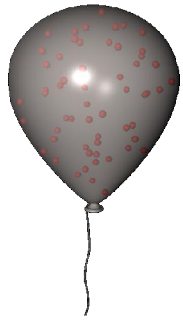


Abbildung 3 Gasteilchen in einem Ballon

Es spielt dabei allerdings für die Dehnung der Ballonhaut nur die senkrechte Komponente der Stosskraft eine Rolle, wie dies in gezeigt ist. Damit ist die Definition des Druckes gefunden. Der Druck ist definiert als Kraft pro Fläche, wobei man die Kraftkomponente meint, die senkrecht zur Fläche steht.

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \qquad 8.3$$

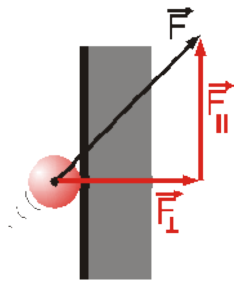


Abbildung 4 Nur die senkrechte Komponente der Stosskraft F bewirkt eine bei einer Ballonhaut eine Dehnung nach aussen.

Für den Druck sind verschiedene Einheiten in Gebrauch. Je nach Anwendungsgebiet und geschichtlichem Hintergrund verwendet man andere Einheiten. Dabei spielt es eine Rolle, ob man vom

- Absolutdruck p_{abs} spricht, dann meint man den Druck gegenüber dem Druck Null im leeren Raum oder
- ob man den Umgebungsdruck p_{amb} (lat. ambiens) meint, den absoluten Atmosphärendruck (Luftdruck), der am Untersuchungsort herrscht oder schliesslich
- den Überdruck p_e (lat. excedens), auch atmosphärische Druckdifferenz genannt ($p_e = p_{abs} - p_{amb}$).

In Tabelle 3 sind einige Druckeinheiten zusammengefasst. Das Pascal ist dabei die Abkürzung für $\frac{N}{m^2}$ und entspricht der SI – Einheit!

Tabelle 3 Einige Druckeinheiten

Kurzform	Name	Name, Erläuterung
Pa	Pascal	SI – Einheit des Drucks. Abk. für $\frac{N}{m^2}$
atm	Atmosphäre	Entspricht dem Druck, erufen durch eine 760 mm hohen Quecksilbersäule bei 0°C Normalfallbeschleunigung.
bar	Bar	Ein bar Entspricht 100'000 Pascal.
mmHg		Entspricht dem Druck, der eine Quecksilbersäule der Höhe x mm erzeugt.

Untersucht man das Verhalten des Druckes genauer, so stellt man fest, dass sich der Druck in einer Flüssigkeit in alle Richtungen in gleicher Grösse ausbreitet. Dies ist schnell erklärt, wenn man sich der Modellvorstellung einer Flüssigkeit bedient. Darin besteht eine Flüssigkeit aus eng aneinander liegenden Teilchen, welche ge-

geneinander verschoben werden können. Wird nun auf ein Teilchen eine Kraft ausgeübt, so weicht dieses aus und gibt die Kraft auf seine Nachbarn weiter.

8.4.1 Druckanwendungen am Beispiel einer Hebebühne

Die allseitige Ausbreitung des Druckes findet in der Technik viele Anwendungen. Am Beispiel einer Hebebühne wollen wir uns den Sachverhalt nun genauer ansehen.
Die in Autowerkstätten verwendeten hydraulische Hebebühnen sehen im Schnitt schematisch etwa wie in Abbildung 5 aus.

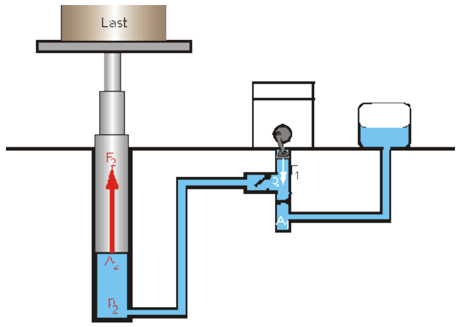


Abbildung 5 Prinzip einer Hebebühne.

Am kleinen Kolben herrscht der Druck $p_1 = \frac{F_1}{A_1}$ und am grossen Kolben der Druck $p_2 = \frac{F_2}{A_2}$. Da der Druck überall im Hydrauliköl gleich gross sein muss, folgt

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \cdot$$

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} \cdot F_2 \qquad 8.4$$

Es handelt sich dabei um eine effiziente Art der Kraftübersetzung!

Beispiel Nehmen wir an, die Querschnittsfläche des kleinen Kolbens beträgt A_1 = 10 cm^2. Diejenige des grossen Kolbens sei A_2 = 1000 cm^2. Zum Heben eines Wagens mit der Masse m = 1000 kg, der also die Kraft F = 10000 N auf den grossen Kolben ausübt, benötigt man nur die Kraft

$$F_{ges} = \frac{A_1}{A_2} \cdot F_G^{Wagen} = \frac{A_1}{A_2} \cdot m^{Wagen} \cdot g = \frac{10\,cm^2}{1000cm^2} \cdot 1000kg \cdot 10\frac{m}{s^2} = 100\frac{kg \cdot m}{s^2} = 100\,N$$

Man sieht also das gewaltige Potential dieser Gesetzmässigkeit.

Weitere Beispiele für diese Art der Druckanwendung sind die hydraulische Presse, die hydraulische Bremse und der Druckwandler. Dabei wird immer über die Fläche die wirkende Kraft übersetzt.

8.5 Der Schweredruck in Flüssigkeiten

Taucht man in einem Schwimmbad zum Grund des Schwimmbeckens, so stellt man fest, dass der Druck auf das Trommelfell mit zunehmender Wassertiefe immer grösser wird. Da von aussen keine zunehmende Kraft auf die Wasseroberfläche ausgeübt wird, muss der zusätzliche Druck durch das Wasser selbst erzeugt werden. Ursache ist die Wassersäule, die sich über einem befindet. Je tiefer man kommt umso höher und schwerer wird diese Säule. Der mit der Tiefe zunehmende Druck in einer Flüssigkeit ist also eine Folge der zunehmenden Gewichtskraft der darüber liegenden Wassersäule, wie dies in Abbildung 6 dargestellt ist.

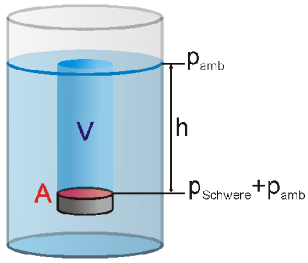


Abbildung 6 Zur Entstehung des Schweredrucks in einer Flüssigkeit.

Damit kann man aber nun den Gewichtsdruck einer Flüssigkeitssäule in einer gewissen Tiefe auch mathematisch beschreiben. Die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule mit dem Volumen *V* beträgt $F_G = m \cdot g = V \cdot \rho_{Flüssigkeit} \cdot g$. Diese Gewichtskraft wirkt auf ein Objekt mit Fläche A in der Tiefe h. Über die Definition des Druckes erhält man für den Schweredruck

$$p_{Schwere} = \frac{F_G}{A} = \frac{V \cdot \rho_{Flüssigkeit} \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h \cdot \rho_{Flüssigkeit} \cdot g}{A} = \underline{\underline{\rho_{Flüssigkeit} \cdot g \cdot h}}. \qquad 8.5$$

Wie man sieht, hängt der Schweredruck, abgesehen von den beiden "Konstanten" *g* und ρ, nur von der Höhe *h* der Flüssigkeitssäule ab – nicht vom Durchmesser! Herrscht über der Flüssigkeit noch ein Pressdruck p_p, z.B. der Luftdruck, so ist dieser zur Berechnung des Gesamtdrucks noch zu addieren.

$$p = p_p + p_{Schwere} \qquad 8.6$$

Der Schweredruck bewirkt einen erheblichen technischen Aufwand, wenn man z.B. mit U – Booten in grosse Tiefen vordringen möchte.

Beispiel: Der Weltrekord im Apnoetauchen (tauchen ohne Sauerstoff) mit konstantem Gewicht und Flossen liegt bei 124 m, aufgestellt von Herbert Nitsch (AUT). Welchen Druck wirkt in der Rekordtiefe auf den Körper von Nitsch, wenn der Druck an der Oberfläche 1 atm beträgt?


Abbildung 7 Freitaucher beim Tieftauchen mit Monoflossen. Bild: Wolfgang Neugebauer Quelle: Wikipedia

Lösung: Mit obiger Gleichung und $p_{amb} = 1 atm = 101325 \frac{N}{m^2}$, $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ und $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ erhalten wir:

$$p = p_{amb} + \rho \cdot h \cdot g = 101'325 \frac{N}{m^2} + \left(10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 124 m \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}\right) =$$
$$= 101'325 \frac{N}{m^2} + 1'216'440 \frac{N}{m^2}$$
$$= 1'317'765 \frac{N}{m^2} = \underline{\underline{13.0 \, atm}} \, (!!)$$

Der Taucher muss also rund das 13-fache des normalen Luftdrucks aushalten – und im übrigen etwa 10 Minuten lang den Atem anhalten!

8.5.1 Anwendungen des Schweredrucks

Eine Folge des Schweredrucks ist bekannt als das hydrostatische Paradoxon. Verbindet man verschiedene Gefässe unterschiedlicher Form miteinander und füllt diese mit einer Flüssigkeit, so steht der Flüssigkeitsspiegel in allen Gefässen gleich hoch (dabei setzen wir voraus, dass die Kapillarität zu vernachlässigen ist – die Gefässe also einen Durchmesser im cm Bereich aufweisen).
Gebraucht wird dies Beispielsweise zur Beobachtung und Kontrolle von Flüssigkeitsständen in Behältern. Dazu wird an diesen ein Schauglas angebracht. Aufgrund des hydrostatischen Druckes steht die Flüssigkeit sowohl im Behälter wie auch im Schauglas gleich hoch.

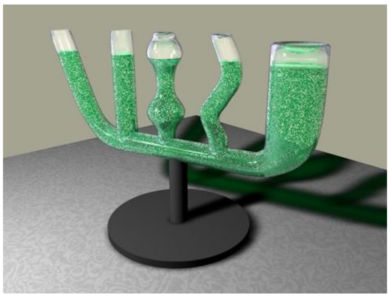


Abbildung 8 Korrespondierende Röhren. Da der Schweredruck nur von der Höhe der Flüssigkeitssäule abhängt, nicht aber von der Form des Gefässes, steht die Flüssigkeit in den verbundenen Gefässen überall gleich hoch.

8.5.1.1 Messung des Luftdrucks

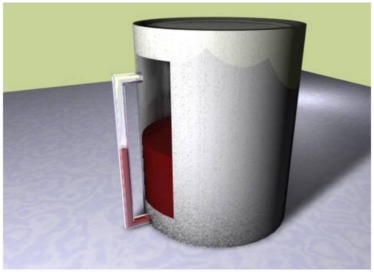


Abbildung 9 Ein Behälter, ausgerüstet mit Steigrohr zur Flüssigkeitskontrolle.

Eine weitere Anwendung ist die Erfindung des Physikers und Mathematikers Evangelista Torricelli, der 1643 die erste Anordnung zur Messung des Luftdrucks entwickelt hat. Dabei wurde ein mit Quecksilber gefülltes Glasrohr mit dem offenen Ende in einen Vorratsbehälter mit Quecksilber getaucht. Zu einem kleinen Teil fliesst dabei das Quecksilber heraus. Im geschlossenen Rohrende entsteht dabei ein Vakuum. Im Rohr selber bleibt eine Quecksilbersäule von rund 760 mm Höhe stehen, gemessen ab dem Füllstand des Vorratsgefässes. Ursache dafür ist der Luftdruck, der auf das Quecksilber im Vorratsgefäss drückt und damit einen Teil des flüssigen Metalls ins Rohr drückt und so bei 760 mm hält. Steigt der Luftdruck, so wird das Quecksilber weiter nach oben gedrückt, der Pegel im Glasrohr steigt und umgekehrt, wenn der Luftdruck sinkt. Der Schweredruck der Quecksilbersäule im Steigrohr kompensiert im Gleichgewicht gerade den Luftdruck – das ist das Prinzip der Luftdruckmessung. Berechnen wir einmal den Schweredruck einer 760 mm hohen Quecksilbersäule:

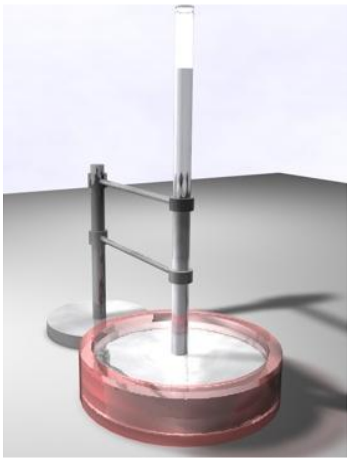


Abbildung 10 Messung des Luftdrucks nach dem Prinzip von Torricelli.

$$
\begin{aligned}
p_{Schwere} &= \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg} \\
&= 13.6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0.760\, m \; . \\
&\approx \underline{\underline{1013\, hPa = 1013\, mbar}}
\end{aligned}
$$

Die Einheit mmHg heisst also nichts anderes, als Millimeter Quecksilbersäule. Mit dieser Einheit wird auch heute noch der Blutdruck angegeben, weil man früher eben Quecksilbermanometer zur Blutdruckmessung verwendet hat. Ein Blutdruck von 120 zu 80 bedeutet einen systolischen Blutdruck, der einer Quecksilbersäule von 120 mm Höhe entspricht und einen diastolischen Blutdruck von 80 mmHg.

8.6 Der Schweredruck in Gasen

Woher kommt eigentlich der Luftdruck, den Torricelli 1643 zum ersten Mal gemessen hat? Über uns liegt eine gewaltige Luftmasse. Diese Luftsäule reicht vom Erdboden bis in den Weltraum. Das Ende der Atmosphäre bildet dabei Grenze. Die Luftsäule über unseren Köpfen hat also eine Höhe von rund 11 km. Zur Berechnung des Schweredrucks darf man nun aber nicht einfach die gleiche Formel wie bei den Flüssigkeiten gebrauchen – die Dichte der Luft ist höhenabhängig. Dies weil höhere Luftschichten darunter liegende zusammendrücken und dadurch eben die Dichte der tiefen liegenden Luftschichten steigt. Wir verzichten auf die Herleitung der **barometrischen Höhenformel**:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot \Delta h} \qquad 8.7$$

Dabei stehen p_0 für den Druck auf einer gegebenen Höhe h_0, M für die mittlere molare Masse M der Luftmassen ($M = 0.02896 \frac{kg}{mol}$), R für die universelle Gaskonstante ($R = 8.31 \frac{J}{mol \cdot K}$) und T für die absolute Temperatur. Die Höhendifferenz zwischen h_0 und der zweiten Höhe h_1 wird mit Δh bezeichnet. Die Formel geht allerdings davon aus, dass die Atmosphäre isotherm ist, dass also die Temperatur mit zunehmender Höhe konstant bleibt. Deshalb sollte man die Formel auch nicht überstrapazieren.

Beispiel Wenn der Sauerstoff-Partialdruck in den Alveolen unter den kritischen Wert von ungefähr $p_{O2,Alveolen}$ = 50 mmHg sinkt, dann kommt es zu Störungen der Gehirnfunktion. Dieser Wert ist erreicht, wenn der Sauerstoff-Partialdruck in der Luft auf p_{O2} = 12.9 kPa absinkt. Benutzen Sie die barometrische Höhenformel um die dazugehörige Höhe auszurechnen. Ist die Höhengrenze, die Sie finden, realistisch? Können Menschen auch in größerer Höhe leben? Wodurch wird die "ultimative" Höhengrenze gesetzt?

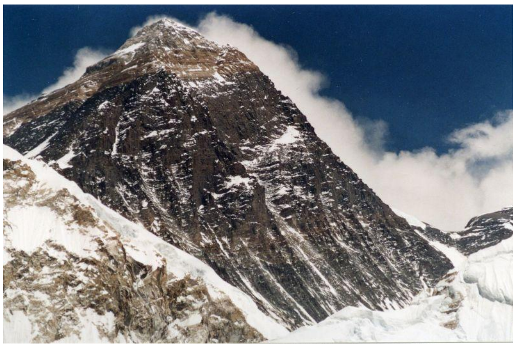


Abbildung 11 Der Mount Everest in voller Pracht. Bild: Uwe Gille. Quelle: Wikipedia

Ansatz: Wir gehen von Meereshöhe aus. Dort beträgt der Druck etwa 100 kPa. Als Temperatur nehmen wir 15 °C, da die Temperatur von Meereshöhe bis zur gesuchten Höhe hin abnehmen wird – deshalb rechnen wir mit einer mittleren Temperatur.

Lösung: Wir lösen die barometrische Höhenformel nach der Höhendifferenz auf und erhalten

$$\Delta h = -\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\frac{RT}{Mg} = -\ln\left(\frac{12.9\,kPa}{100\,kPa}\right)\frac{8.31\frac{J}{mol \cdot K}\cdot 288\,K}{0.02896\frac{kg}{mol}\cdot 9.81\frac{m}{s^2}} = 2.05 \cdot 9009\,m \approx \underline{\underline{17.3\,km}}\,.$$

Dieser Wert entspricht etwa der Grenze der Troposphäre, also der unteren Atmosphäre. Aus den Erfahrungen von Bergsteigern wissen wir, dass man bis fast 9000 m ohne Sauerstoff auskommen kann (der Mount Everest ist 8848 m hoch). Unser Wert ist also viel zu hoch. Der

Mensch wird vorher bewusstlos. Menschen können allerdings in grossen Höhen leben (in Nepal liegt rund 40 % des Landes über 3000 m), falls es aufgrund der Temperaturen noch Nahrung gibt. Unser Körper ist extrem anpassungsfähig (Höhentraining).

8.7 Folgen des Schweredrucks – die Auftriebskraft

Jeder hat schon mal die Erfahrung gemacht, dass man einen Stein unter Wasser leichter hochheben kann als an Land. Oder dass es eine erhebliche Kraft braucht, um einen Wasserball unter Wasser zu drücken. Wir alle nehmen zur Kenntnis, dass ein mit Helium gefüllter Luftballon einfach so gen Himmel hin aufsteigt. Für all diese Phänomene gibt es in der Physik den Begriff Auftrieb. Damit wollen wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen.

8.7.1 Auftrieb in Flüssigkeiten

Ursache für den Auftrieb ist der Schweredruck. Taucht ein Objekt, z.B ein Metallzylinder teilweise in eine Flüssigkeit ein (Abbildung 12), so ruft der Schweredruck p_A an der Unterseite des Zylinders eine Kraft $F_A = p_A \cdot A$ hervor. Die vom Schweredruck auf die Seitenflächen des Zylinders ausgeübte Kräfte heben sich paarweise auf und beeinflussen die Auftriebskraft nicht.

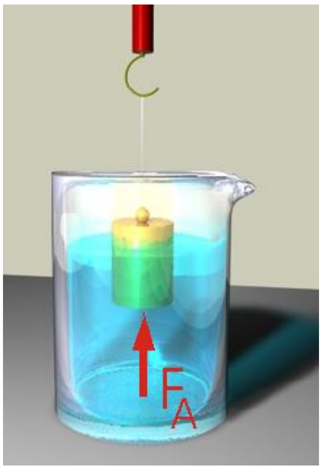


Abbildung 12 Aufgrund des Schweredrucks wirkt eine Kraft F_A auf die Unterseite des eingetauchten Zylinders. Die seitlichen Kräfte heben sich gegenseitig auf.

Wir wollen nun einen Ausdruck für die Auftriebskraft herleiten, wobei uns Abbildung 13 helfen soll. Taucht ein Quader ganz in eine Flüssigkeit der Dichte $\rho_{Flüssigkeit}$ ein, so ist der Druck p_2 an der unteren Fläche des Quaders grösser als der Druck p_1 an der oberen Fläche. Für die beiden Kräfte gilt

$F_1 = p_1 \cdot A = \rho_{Flüssigkeit} \cdot h_1 \cdot g \cdot A$ und $F_2 = p_2 \cdot A = \rho_{Flüssigkeit} \cdot h_2 \cdot g \cdot A$.

Die Differenz der beiden Kräfte entspricht der nach oben gerichteten Kraft und somit der Auftriebskraft F_A.

$$\begin{aligned} F_A &= \rho_{Flüssigkeit} \cdot h_2 \cdot g \cdot A - \rho_{Flüssigkeit} \cdot h_1 \cdot g \cdot A = \rho_{Flüssigkeit} \cdot (h_2 - h_1) \cdot g \cdot A \\ &= \rho_{Flüssigkeit} \cdot h \cdot g \cdot A = \rho_{Flüssigkeit} \cdot V_{Körper,eingetaucht} \cdot g \end{aligned}$$

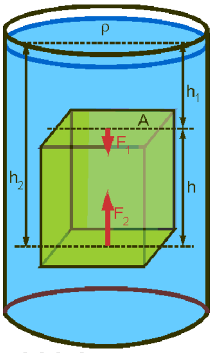


Abbildung 13 Zur Herleitung der Auftriebskraft als Folge des Schweredrucks.

Das Volumen $V_{Körper,eingetaucht}$ des Körpers und das Volumen der verdrängten Flüssigkeit $V_{Flüssigkeit,verdrängt}$ sind gleich. Die Auftriebskraft beträgt also

$$F_A = \rho_{Flüssigkeit} \cdot V_{Flüssigkeit,verdrängt} \cdot g \qquad 8.8$$

Der Faktor $\rho_{Flüssigkeit} \cdot V_{Flüssigkeit,verdrängt}$ gibt die Masse $m_{Flüssigkeit,verdrängt}$ der verdrängten Flüssigkeit an. Das Produkt $m_{Flüssigkeit,verdrängt} \cdot g$ entspricht der Gewichtskraft $F_{G,Flüssigkeit,verdrängt}$ der verdrängten Flüssigkeit. Damit haben wir das archimedische Prinzip gefunden:

Der Betrag der Auftriebskraft eines Körpers, der teilweise oder vollständig in eine Flüssigkeit eintaucht ist gleich dem Betrag der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit!

Beispiel Ein Floss wie in Abbildung 14 soll mit einer Last von 2000 kg tragen können und dabei zu höchstens zu 90 % seines Volumens im Wasser (*ρ = 1000 kg/m³*) untertauchen. Wie viele m³ Holz von der Dichte *ρ = 820 kg/m³* müssen mindestens zum Bau des Flosses verwendet werden?

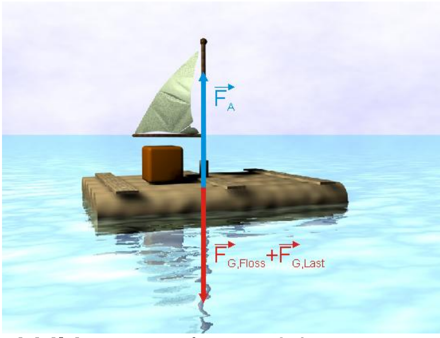


Abbildung 14 Floss auf dem Wasser.

Ansatz: Das gesuchte Holzvolumen sei V_{Floss}. Dann gilt im statischen Gleichgewicht $F_{G,Floss} + F_{G,Last} = F_A$, da die Auftriebskraft sowohl die Gewichtskraft des Flosses wie auch die Gewichtskraft der Last kompensieren muss.

Lösung: Setzt man nun alles ein, so erhält man $\rho_{Holz} \cdot V_{Floss} \cdot g + m_{Last} \cdot g = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot V_{Floss} \cdot 0.9$. Auflösen nach dem Volumen liefert

$$V_{Floss} = \frac{m_{Last}}{\rho_{wasser} \cdot 0.9 - \rho_{Holz}} = \frac{2000\,kg}{1000\frac{kg}{m^3} \cdot 0.9 - 820\frac{kg}{m^3}} = \underline{\underline{25\,m^3}}.$$

Man braucht also ganze 25 m³ Holz, um so ein Floss bauen zu können. Das sind immerhin 20.5 Tonnen!

Schiffe können nur deshalb schwimmen, weil sie entsprechend ihrem Gesamtgewicht dasselbe Gewicht an Wasser verdrängen. Ein Schiff mit einer Masse von 30'000 Tonnen Gesamtmasse verdrängt auch 30'000 Tonnen Wasser. Dies wird erreicht, indem ein Schiff generell viel Hohlraum mit Luft aufweist.

8.7.2 Dichtebestimmung mit dem archimedischen Prinzip

8.7.2.1 Das Aräometer

Ein Aräometer hat etwa die Form einer langen Pipette, die an ihrem Ende ein wenig verdickt ist. Im Anschluss an die Verdickung findet sich eine Beschwerung, die häufig aus Bleischrot besteht. Zusätzlich besitzt ein Aräometer eine kalibrierte Skala, an der man aufgrund der Eintauchtiefe des Geräts in eine Flüssigkeit deren Dichte ablesen kann. Dabei macht man sich das archimedische Prinzip zunutze. Das Aräometer taucht umso tiefer in die Flüssigkeit ein je kleiner die Dichte der Probeflüssigkeit ist.


Abbildung 15 Aräometer zur Messung der Dichte von Flüssigkeiten.

8.7.2.2 Bestimmung der Dichte eines Feststoffes mit einem Kraftmesser

Was macht man aber, wenn man die Dichte eines Feststoffes bestimmen möchte? Ein Aräometer hilft dann schlecht weiter. Nun, in diesem Fall muss man einfach die grauen Zellen ein wenig bemühen. Man wägt den Körper unbekannter Dichte mit einem Newtonmeter zunächst an Luft ($F_{G,Körper}$), taucht ihn dann mit einem Kraftmesser in eine Flüssigkeit mit bekannter Dicht und misst nun die neue Kraft, die der Kraftmesser anzeigt ($F_{in\,Flüssigkeit}$). Gemäss dem archimedischen Prinzip entspricht die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit gerade der Differenz der beiden gemessenen Kräfte: $F_{G,verdr.Flüssigkeit} = F_{G,Körper} - F_{in\,Flüssigkeit}$. Nun teilt man beide Seiten durch die Fallbeschleunigung g und die Dichte der Flüssigkeit $\rho_{Fl.}$ und bekommt $V_{verdr.Flüssigkeit} = V_{Körper} = \dfrac{F_{G,Körper} - F_{in\,Flüssigkeit}}{\rho_{Flüssigkeit} \cdot g}$. Dabei machen wir uns zunutze, dass der Körper ganz eintaucht und das verdrängte Flüssigkeitsvolumen gleich dem Körpervolumen ist. Jetzt wird nur noch das Volumen des Körpers durch $\dfrac{m_{Körper}}{\rho_{Körper}}$ ersetzt und nach der Dichte des Körpers aufgelöst:

$$\rho_{Körper} = \frac{\rho_{Flüssigkeit} \cdot g \cdot m_{Körper}}{F_{G,Körper} - F_{in\,Flüssigkeit}} \qquad 8.9$$

8.7.3 Auftrieb in Gasen

Ganz analog zu den Flüssigkeiten berechnet man den Auftrieb in einem Gas:

$$F_A = \rho_{Gas} \cdot V_{Körper} \cdot g \qquad 8.10$$

Hier macht es sich eben bemerkbar, dass sowohl Flüssigkeiten wie auch Gase Fluide sind. Man muss sich nur vor Augen halten, dass die Dichte eines Gases sehr stark von der Temperatur abhängt.

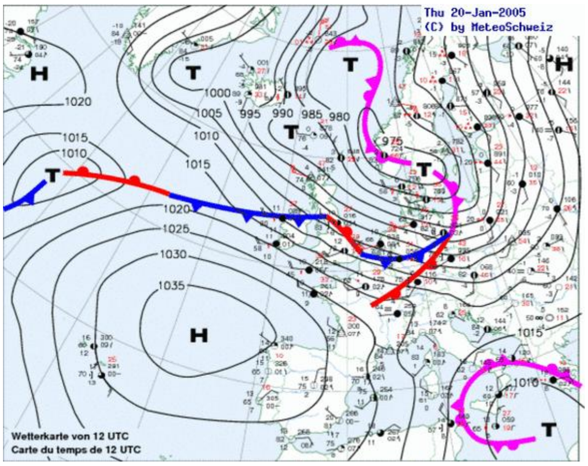
Beispiel Ein mit Helium gefüllter Luftballon der Masse 2g mit einem Durchmesser von 30 cm wird losgelassen. Welche maximale Last könnte man diesem Luftballon anhängen (Briefpost...), wenn er in eine Höhe fliegen soll, in der die Dichte von Helium $\rho_{He} = 0.1785 \dfrac{kg}{m^3}$ und die Dichte von Luft $\rho_{Luft} = 1.293 \dfrac{kg}{m^3}$ beträgt?

Ansatz: Wir nehmen an, dass der Luftballon kugelförmig ist. Die Masse der Anordnung beträgt im Problem $m = m_{Luftballon} + m_{He} + m_{Last}$! Die Auftriebskraft kompensiert in der gesuchten Höhe gerade die Gewichtskraft der Anordnung.

Lösung: Aus $F_A = F_G$ folgt durch einsetzen der entsprechenden Formeln $\rho_{Luft} \cdot g \cdot V_{Luftballon} = \left(m_{Luftballon} + m_{He} + m_{Last} \right) \cdot g$. Wir kürzen g und setzen $m_{He} = \rho_{He} \cdot V_{Luftballon}$. Dann folgt schliesslich $\rho_{Luft} \cdot V_{Luftballon} = m_{Luftballon} + \rho_{He} \cdot V_{Luftballon} + m_{Last}$. Aufgelöst nach der gesuchten Lastmasse folgt $m_{Last} = \rho_{Luft} \cdot V_{Luftballon} - m_{Luftballon} - \rho_{He} \cdot V_{Luftballon}$. Setzt man nun noch $V_{Luftballon} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} d^3$ ein und rechnet aus, erhält man als Resultat $m_{Last} = \underline{\underline{13.8\,g}}$.

8.7.4 Wetterkarte

Unser Wetter ist ebenfalls eine Folge des Auftriebs. Die Sonne erwärmt aufgrund von meteorologischen Gegebenheiten die Luftmassen der Erde ungleichmässig. In Gebieten mit grosser Sonneneinstrahlung steigt die Temperatur an, dadurch sinkt die Dichte der erwärmten Luft ab, der Luftdruck sinkt und sie steigt nach oben. In Gebieten, welche sich abkühlen nimmt die Dichte der Luft zu, der Luftdruck steigt. Die Luftmassen fliessen nun von den Hochdruckgebieten zu den Tiefdruckgebieten spiralförmig ab. So entsteht der Wetterwechsel.



Quelle: wa.slf.ch